SULLA PORTATA DE' FIUMI MEMORIA STORICO CRITICA MATEMATICA DI AGATINO...

Agatino San Martino




FONDO PIZZOFALCONE

SULLA PORTATA DE' FIUMI

MEMORIA

STORICO-CRITICA-MATEMATICA

N.B. Premetto al corpo della Memoria un Prospetto 1° per metterne sottocchio come in una specie di sunto ragionato e d'introduzione il contenuto: 2° per soddisfare all'art. 41 degli Statuti *nel 1824 pubblicati ed a me qual socio corrispondente comunicati dalla stessa Accademia, alla quale ho l'onore di presentarla.*

Estratta dal Vol. XVI degli Atti dell'Accademia Gioenia.

SULLA

PORTATA DE' FIUMI

MEMORIA

STORICO-CRITICA-MATEMATICA

DI

AGATINO SAN-MARTINO



CATANIA

1841

PER PIETRO GIUNTINI

SULLA PORTATA DE' FIUMI

MEMORIA

STORICO-CRITICA-MATEMATICA



PROSPETTO



È più di un decennio che la circostanza portommi a gettar sulla carta le idee in questa memoria raccolte sul problema della portata de' fiumi. Questo problema per quanto utile fosse ed importante, per altrettanto difficile complicato e sublime riesce in risolversi. I progressi della sua soluzione sempre tardi saranno, e limitati: e se starassi al sommo rigore giammai sapranno toccarvi la meta. La natura indocile e ricalcitrante a questo riguardo, non lascia all' idrometra esperto e sagace che la debole risorsa di una semplice approssimazione: e gli alti geometri che di proposito vi si son dati, nel mentre che vi han camminato a passi sempre incerti e a tentone, han dovuto restarvi convinti delle nostre deboli forze in questo genere di ricerche. Quindi è che l' idrometria pratica non può vantarsi nelle vie della soluzione *a priori* che di una formola a' bisogni ordinarj dell' industria soddisfacente, e che sotto il nome si conosce di formola di Eytelwein dal geometra ale-

manno che empiricamente ne ha dato le ultime correzioni; nel mentre che nella soluzione *a posteriori* e del tutto sperimentale, fra i tanti strumenti all' uopo immaginati e prodotti, strumenti sempre inesatti, sempre imperfetti e nell' operare difficili, non può in certo modo utilmente giovarsi che del metodo delle aste ritrometriche; metodo il più facile e spedito, il più atto ad applicarsi a' casi in generale difficili e bruschi; ma metodo non mancante esso pure di difficoltà e inesattezze, lasciando tuttora a desiderare comodo e aggiatezza maggiore nell' operazione, confidenza e giustezza ne' risultati. Il mio oggetto in una questione siffatta non è stato che di scorrerne lo stadio che ha corso fino a' nostri ultimi tempi. Mi son dato dunque a seguirne con filosofia ed analisi i progressi più utili e marcati; a richiamarne mi son fatto e a metterne sottocchio i metodi più commendati onde si è veduta e discussa.

Incominciando dall' analisi ragionata della questione, senza punto arrestarmi sul metodo delle tavole paraboliche, che non potrebbe tutto al più applicarsi con qualche approssimazione che a' canali di derivazione; senza trattenermi sul cosiddetto metodo meteorologico di cui menzione si è fatta in una memoria sull' irrigazione del Simeto negli atti di questa Accademia Gioenia, perchè assai congetturale del tutto empirico e di poca soddisfacenza e fiducia, io sono venuto tutto di seguito sopra di quello idrometrico generalmente seguito, e a fissarne la discussione nella ricerca de' due elementi *sezione e velocità media* da' quali interamente dipende. Il primo niuna speciale discussione presenta; ond' è che passandovi

rapidamente di sopra, mi son fatto a ridurne al secondo l'intera questione, che ho diviso in due parti, l'una fisico-matematica, e sperimentale l'altra. Strada facendomi quindi per la prima parte ho incominciato dal far menzione della teoria generale dei fluidi in moto: e sulle vedute analitiche di Lagrange procedendo, ed a' fluidi omogenei incomplessibili cui l'assunto appartiene ristringendomi, vi ho richiamato le *equazioni della continuità delle forze sollecitanti;* e mercè di esse la cosiddetta equazione de' fluidi vi ho determinato; equazione a differenziali parziali di secondo ordine sulla di cui integrazione la soluzione del problema dell'intutto si appoggia.

L'integrazione di questa equazione non è punto conosciuta nello stato delle conoscenze presenti: epperò neanche lo è la soluzione di cui si tratta. Io ho fatto vedere a questo proposito le condizioni analitiche sotto le quali potrebbe essa effettuarsi: i casi nei quali Lagrange e dietro a lui la comune de' classici hanno opinato potervi avere il suo effetto: le oggezioni ho ricordato che contro questa opinione ha prodotto il professore Tadini: i tentativi che vi si sono applicati: ridotto a miglior forma il processo analitico che lo stesso Tadini ne ha dato: e portato un colpo d'occhio in fine sul metodo generale esatto e diretto onde sembra di potersi trattare.

L'inaccessibile difficoltà di questa soluzione ha condotto il Navier a proporre delle nuove vedute sul trattamento del problema in discorso; ed indotto insieme i geometri dal cammino di una soluzione generale rivolgersi a quella di un genere particolare di movimento detto *movimento lineare.* Dopo avere io

fatto conoscere così di passaggio le idee del Navier, son passato a parlare della teoria del movimento a due coordinate, a cui il lineare appartiene. Quivi a rapportar mi son fatto le opposizioni mosse dal professore Tadini contro la generalità dell' integrale dell' equazione de' fluidi a questo caso corrispondente: son venuto quindi a far parola del metodo che egli vi ha seguito dalla sua banda: e facendo alla convenienza sul soggetto qualche critica osservazione, son finito conchiudendo che l' ipotesi del movimento lineare illegittima pe' fluidi in generale risulta sempre legittima nel caso particolare delle acque correnti che il nostro assunto riguardano. Posta dunque questa legittimità, mi sono immediatamente portato su i progressi della soluzione sotto questo nuovo punto particolare di vista. Ed incominciando dal grande Eulero son disceso sulle formole di Chezy e Dubuat, delle quali la composizione ne ho dato a conoscere; il merito e l' utilità ne ho rimarcato.

Il cavalier Bonati uno degli idrometri più esperti che vanti la nostra Italia nel regolamento de' fiumi, diede nel 1784, una nuova teoria sul loro movimento assai semplice ed agevole nello spiegarne i fenomeni. Fedele per quanto mi è stato possibile alla successione de' tempi, io ne ho fatto in questo luogo il richiamo; e l' essere filosofico ne ho fatto conoscere. L' acqua per gli alvei si muove come per piano inclinato: se dunque il suo moto per sua natura accelerato diviene equabile, non può esserlo che per effetto delle resistenze che va esso incontrandovi: ma noi non sappiamo come ciò avvenga: quindi fatta qualche ipotesi, si è alla esperienza rimessa l' opera

di verificarla e correggerla. Quella di Coulomb la più accolta e distinta, ha prodotto dalle mani di Girard e Prony una formola per rappresentare la legge di queste resistenze; formola che sottomessa di poi all' esperienza, da esso loro è stata verificata e molto vicina al fatto ritrovata; e rimessa ancor più sotto l' impero di nuovi moltiplicati esperimenti, ha acquistato un altissimo grado di confidenza, ed è divenuta dice il Masetti, quella onde si determina la velocità media delle acque correnti per gli alvei con moto equabile e permanente. Venuto io a far menzione dell' ipotesi da Coulomb proposta, mi feci tosto a rimarcarne l' uso nelle ricerche di Girard, che il primo fu ad introdurla nel calcolo: e quindi al Prony venendo, mi diedi a rendere conto de' di lui travagli. Questo illustre scrittore poggiando e cammin facendo sulle vedute di Girard, una teoria fisico-matematica generale e completa produsse sul movimento in questione: ed io nel farne rapporto ho dato a conoscerne l' equazione finale, in cui quella di Girard e Chezy sono come casi particolari comprese; l' applicazione della sua legge delle resistenze ve ne ho fatto vedere; e il metodo ingegnoso rimarcare onde egli coll' appoggio dell' esperimento i coefficienti numerici è venuto ad assegnarne. Ma questa teoria tuttochè elegante ingegnosa sublime, non lascia di mancar di chiarezza e semplicità. A questo proposito quella del Bonati tradotta per così dire in frasi algebriche e resa analitica dal Venturoli, e da lui applicata alle acque correnti in tutti i casi, merita qualche attenzione, conducendo direttamente e senza stento al fine proposto. Quindi è che io mi sia per un

poco fermato sopra di essa. Dalle due verità fondamentali di quella filosofica dell' illustre idrometra di Ferrara, ho fatto vedere come ne derivano le due fondamentali di quella analitica dell' esimio direttore della scuola idraulica pontificia; e perciò la loro essenziale medesimezza e identità: ho fatto vedere dippiù come questo distinto idraulico partendo e conto tenendo dell' effetto delle resistenze, sia venuto dalla sua banda all'espressione analitica della cercata velocitá; espressione dico però che egli stesso non ha saputo in quell' epoca stessa definire se preferibile fosse, se di maggior confidenza nelle applicazioni della formola data dal Prony. Frattanto verso quel medesimo tempo (1814, 1815) quest' ultima formola ricomparve ne' volumi dell' Accademia Reale di Berlino con coefficienti numerici novellamente calcolati e maggiormente rettificati da Eytelwein. Quindi facendo io conoscere come in ultimo oggetto questo nuovo perfezionamento della formola, ho conchiuso la prima parte del mio picciolo scritto, i travagli riferendo della scuola idraulica sopracitata a questo riguardo eseguiti.

Conosciuto il bisogno della velocità nella stima delle portate, se ne dovette sentire quello della maniera onde poterla conoscere. Procedendosi a tale oggetto dietro a delle assolute e pure teorie, non tardossi a sentire che esse riuscir non poteano di facile risorsa in ottenerne l' intento. Quindi da questo cammino torcendo, la strada intentarono di misurarla mercè l' uso di opportuni strumenti. Ma nonostante la moltiplicitá all'uopo inventatane, giammai arrivar si potè a restarne contenti, a riguardo principalmente della variazione a cui va essa soggetta. Onde è che

senza abbandonarlo, rallentando cotesto cammino, da un' altra banda voltaronsi, alla ricerca restringendosi della semplice velocità media: e la natura sempre coll' esperienza esplorando, delle teorie sopra d' ipotesi combinarono, che colla guida e coi lumi della medesima di rettificare cercarono: donde l' insigne formola come dicemmo del geometra alemanno ne nacque. Percorsa dunque la via delle teorie ci restava camminarne quella della pratica operazione degli strumenti. Questo è il soggetto della seconda parte di cui andiamo a dar conto; soggetto che discusso vi abbiamo, sostenendo sempre e accompagnando il fatto dell' operazione colla face del ragionamento e del calcolo.

Il galleggiante del Castelli ha dovuto essere il primo strumento idrometrico a concepirsi e ad usarsi. Onde è quello da cui ho io incominciato. Senza venire a descriverlo perchè molto semplice e conosciuto, io mi son fatto l' uso a ricordarne; uso assai limitato e ristretto; e a far menzione in proposito son venuto del molinetto idrometrico che il Bossut sostituir vi solea all' occorrenza. Incominciando a dubitarsi del cangiamento della velocità dalla superficie al fondo e dal filone alle ripe, incominciò ancora a cercarsene il come modificarlo onde ridurlo a questo uopo. Quindi io son venuto a riandarne i pensamenti del P. Cabeo del Baratteri del Lecchi del Cav. Bonati. Mentre così si pensava in Italia, Mariotte con altre vedute procedeva in Francia al medesimo fine: e l' utile idea produsse di una nuova specie di galleggiante, che in seguito il Brunacci disse galleggiante composto; l' uso ne addimostrò; e la teoria matematica ce

ne diede. Io dopo averne esposto la teoria , notato gl' incovenienti, i difetti rimarcato, son venuto a parlare di un altro strumento che molti autori han commendato per le misure in questione. Questo è il pendolo idrometrico di cui se ne dee al Guglielmini la prima idea. Sotto diversi metodi di costruzione è stato questo strumento proposto. Quello di quadrante idrometrico dovuto al suo primo inventore, consiste in un quadrante graduato da cui ha preso il nome, e che ha per oggetto di misurarvi l' angolo di deviazione del filo del pendolo dalla verticale , base della sua teoria. Io ne ho fatto conoscere la teoria le imperfezioni le inesattezze: la somma diffidenza in cui è caduto ne ho fatto sentire, il generale abbandono. Quindi richiamando così di passaggio le modificazioni che il Ceva il Zendrini il Ximenes ne hanno proposto , mi è venuto a fermarmi sulla lodevole costruzione che il professor Venturoli ne ha dato indipendentemente dalla misura dell' angolo di deviazione suddetto. Quivi non solo ne ho detto in breve quanto ne ha il Venturoli prodotto, ma ne ho sviluppato nella sostanza la teoria analitica; ne ho rimarcato il grado di confidenza che merita ne' risultati. In cotesto luogo ho fatto menzione di alcuni strumenti al Ximenes, al Cav. Lorgna , al Barbantini dovuti; strumenti la di cui operazione dipendendo in fondo dall' uso di una palla esposta mercè di un filo flessibile all' urto della corrente, si rapportano in certo modo al pendolo in discorso. Nella pratica di questo strumento sono sempre da temersi gli effetti dell' impressione della corrente sul filo sommerso. Onde è che il medesimo professore Venturoli ha pensato e proposto un terzo me-

todo di costruzione; quello di cangiarne il filo in una asta cilindrica mobile intorno ad un punto fisso; costruzione che egli ha classificato sotto il nome di pendolo idrometrico composto. A questo proposito mi sono io dato ad esporne la teoria, la quale portando ad un calcolo assai laborioso e prolisso, l' uso ne rende penoso e difficile; tanto che mi è sembrata convenevole cosa il fare all' occasione notare, che il pendolo idrometrico con questa sua nuova forma, nel mentre che guadagna sugl' inconvenienti della prima sua costruzione, perde molto però dalla banda della facilità della sua teoria e della sua speditezza.

Prima di lasciare i travagli a' quali il Castelli e il Guglielmini aveano dato ragione, cosa conveniente sembrommi far parola di una macchina da esso loro usata per andare direttamente alla conoscenza della portata, senza passare per quella della velocità. Questa macchina é il cosiddetto regolatore, usato e commendato dal primo, e dal secondo con delle modificazioni adottato. In primo luogo di quello del Castelli ho parlato: e quindi a quello del Guglielmini venuto, ne ho dato la teoria; rilevate le difficoltà che presenta; le modificazioni ne ho menzionato che vi ha proposto il Prony; il concernente giudizio che ne ha il Venturoli, proferito e finalmente riferendo ho conchiuso, la lodevole e felice applicazione che ne ha fatto il valoroso Tadini alla dispensa e misura delle acque correnti.

Dopo questa esposizione strada mi son fatto a parlare di altri diversi strumenti da diversi idraulici insigni proposti, dei quali ho curato farne vedere

l' uso la costruzione i difetti: ed utile cosa ho stimato di dare primamente contezza di una memoria del professore Masetti su i *tachimetri idraulici*, inserta nel volume per l' anno 1824 della raccolta di autori italiani pel moto delle acqua. Quindi il filo delle idee ripigliando sono a far menzione venuto della fiasca idrometrica del Nadi, che portando a' medesimi risultati tanto in acqua corrente quanto stagnante, cadde tosto in discredito e venne scordata. Dipoi del tubo ricurvo di Pitot ho fatto parola, il quale tuttochè molto in uso sia stato presso i francesi, poca esattezza promette e precisione ne' risultati. Dopo avere ricordato diversi altri strumenti, sui quali alla citata memoria del professore Masetti ho rimandato, mi son fatto a parlare della ventola dell' abbate Ximenes; a mostrarne l' uso e la teoria; strumento che assai commendabile in pratica riuscito sarebbe, se più semplice ne fosse l' apparato e meno operoso il maneggio. Quindi passato sono a discutere il cilindro galleggiante dal P. Lecchi proposto, e di cui l' idrometra inglese M. Mann ha parlato come suo proprio: e dopo aver fatto io conoscere una macchinetta assai semplice che ho trovato rapportata nella discussione idraulica della fisica matematica dei PP. Cannovai e del Ricco, mi sono io fermato sullo strumento di M. Woltmann, in Francia conosciuto sotto il nome di reometro. Di questo strumento la costruzione e la teoria ne ho richiamato con qualche dettaglio; l' uso e le difficoltà, l' applicazione e la pratica ne ho fatto rimarcare. Arrivato a questo punto io son venuto a posare per cosiddire il discorso sull' asta ritrometrica, ultimo degli

strumenti che io ho preso a discutere. La teoria di questo strumento è molto elevata; sublime ne è l'analisi da cui dipende: ma la difficoltà di misurarvi l'angolo d' inclinazione ond' esso viaggia, ne rende ancor più difficile l' applicazione, principalmente quanl do si attende al sommo rigore. Io ho esposto con discorso misurato questa teoria sublime ed elegante; i- metodo onde potersi eseguire la misura di questa inclinazione; le risorse onde le difficoltà diminuirne; risoluto dei dubbj che attraversar ne potrebbero l'uso tanto utile in generale, e l' applicazione alla pratica; ricordato infine le sue anomalie dal fatto sperimentale, allorchè si considera ne' rapporti colla scala delle velocità dalla superficie al fondo.

Reso conto de' principali strumenti usati fino a questi ultimi tempi per la ricerca della portata dei fiumi, rimaneva il parlare de' metodi onde al fatto applicarli. Questo è quello che ho io esposto lo scritto conchiudendo. Fra tutti gli strumenti descritti il galleggiante semplice e il composto sotto la costruzione delle aste ritrometriche, sono i due che offrono alla pratica un metodo di applicazione il più facile e pronto, il più spedito. Questa verità dall' esperienza e dalla ragione contestata, ha fatto che ad essi io mi fossi attenuto nella scelta de' metodi pratici conducenti all'assunto. Parlando del primo vi ho io esposto il processo onde se ne conduce l' applicazione e l' uso che far vi si può utilmente delle formole empiriche prodotte da' sommi idraulici Dubuat e Prony: le formole stesse vi ho dato insiememente a conoscere: la risoluzione vi ho dato infine di alcuni dubbj che potrebbero farsi sentire nel fatto della ricer-

ca. Passando al secondo mi son dato a contestarne la speditezza ond' esso porta al fine proposto; ad esporne l' operazione pratica onde procede; a rapportarne stante l' importanza di essere dice la citata scuola semprepiù divulgato conosciuto promosso, in esemplificazione la memoria conchiudendo, un esperimento la prova cioè da quella scuola eseguita nel 1821 sul tronco del Tevere tra ponte molle e il suo ingresso in Roma: a ridurne infine a formole simboliche il processo della pratica operazione.

SULLA PORTATA DE' FIUMI

MEMORIA

STORICO-CRITICA-MATEMATICA



Il problema sulla portata de' fiumi è un problema di somma importanza ed utilità. La sua soluzione è l'argomento onde dipendono tutte le ricerche che far si possono sul loro corso: il principio di tutte le utilità che se ne possono ritrarre: il modulo per così esprimermi di tutte le misure a prevenirne i disagi di cui sono capaci. La soluzione generale di questo problema non si riduce che alla determinazione della sezione, cioè del profilo trasversale dell' alveo, e di quella specie di velocità immaginaria detta *media* dagl' idrometri, la quale supposta in tutti i punti della sezione costante, eguaglia col suo prodotto per essa la risultante di tutte le velocità effettive onde i filamenti aquei inegualmente vi passano. Il cammino per arrivare all' ultimo special valore di questi due elementi della portata è assai erto e difficile; e tale disgraziatamente lo sarà per lungo tratto di tempo; e forse forse per sempre. In questa memoria lasciando io di parlare del metodo delle tavole paraboliche sull' inesatta teoria idraulica della parabola fondato, al P. Grandi per quanto io sappia in origine dovuto, che il Bernareggi non è molto ha ritoccato, e

che se è per avventura in qualche modo applicabile dice il Masetti, alle bocche di derivazione di piccolissima luce rispetto a' recipienti in cui s'aprono, non lo è in conto alcuno alle sezioni de' canali o de' fiumi: lasciando di parlare di un certo altro metodo che dipendente dalla caduta delle pioggie è detto *meteorologico;* che ha proposto il Bernoulli, usato sulla Senna il Dubuat, menzionato in una memoria fra quelle dell'Accademia Gioenia sull'irrigazione del Simeto il Principe Giuseppe Paternò Alvaro, adottato il Cocconcelli in un progetto di ponte sul Taro; metodo del tutto empirico, molto congetturale e di poca soddisfacenza e fiducia: lasciando dico di parlare di questi metodi perchè non fanno al mio preso punto di vista, io mi propongo di mostrare brevemente i progressi più utili e marcati di questo difficile problema, sotto di quell'aspetto guardandolo che in principio divisai; di farne vedere con quella sobrietà di dire che ad una memoria conviensi, i diversi metodi matematici e sperimentali onde la severa soluzione se ne è trattata e se ne tratta nell' attuale periodo della scienza.

1. La meccanica razionale tuttochè sia da circa un secolo arrivata al più alto grado di perfezione e semplicitá, rimane tuttora assai imperfetta per quella parte delle sue applicazioni che riguarda i fluidi in movimento. Questa scienza ridotta a due soli principj; l' uno relativo al movimento di traslazione, ed a quello di rotazione l' altro, si trova intimamente legata alla matematica ed alla fisica. Tradotti questi principj fondamentali in formole algebriche, eseguisce tutte le sue operazioni con delle pure combina-

zioni analitiche: ed imprestati dalla fisica i fenomeni della natura al suo oggetto necessarj, vi compisce ed effettua tutte le sue ricerche. Ma la mancanza in matematica de' metodi che la questione domanda per l' integrazione delle equazioni, a cui quelle combinazioni conducono nel movimento in discorso; e le difficoltá pressochè insuperabili, onde tenere esatto conto e sottomettere a calcolo le circostanze fisiche che l'accompagnano, fanno che nonostante gli sforzi di altissimi ingegni, noi fossimo quasi del tutto allo scuro delle vere leggi alle quali va esso soggetto. Se noi lo sguardo voltiamo al movimento delle acque in particolare, fluido sempre sotto gli occhi nostri e nelle nostre mani, il più che ci è conosciuto e familiare, noi non ci veggiamo più di gran lunga avanzati. Il movimento di questo fluido il più che da vicino c' interessa, ha in ogni tempo richiamato sopra di se la nostra attenzione: si é desso seguito ed osservato in tutti gli stati: si è studiato e contemplato nei suoi fenomeni, e dopo più secoli noi non siamo arrivati colla guida dell'esperienza e del ragionamento che a riconoscervi le leggi ond' esce dagli orificj de' vasi, quasi ancora restando nella piena ignoranza di quelle onde si effettua nel gran recipiente de' mari, ed assai limitati onde conducesi sulla superficie terrestre. Quest' ultima specie di movimento, quello dico delle acque per gli alvei, come è capace allorchè regolato e diretto, di grandi utilità e de' nostri maggiori vantaggi; così de' nostri mali maggiori quando si trascura e si abbandona a se stesso. Quindi è di somma importanza lo studiarne gli andamenti le leggi rintracciarne. Di tutte le ricerche a questo

proposito la prima è quella di sapere la quantità di fluido che in un dato fiume trascorre. Con questa conoscenza alla mano facile riesce dirigerne e condizionarne il cammino; i tristi effetti prevenirne delle inondazioni; usarne ne' diversi bisogni; renderli utili alla navigazione all'agricoltura alle arti. Ond'è che il problema della portata de' fiumi sia stato in tutti i tempi tenuto come il fondamentale di tutti quelli del loro cotanto importante regolamento. Questo problema non fu trattato che con maniere affatto erronee sino allo Abb. Castelli, il primo a vederlo sotto il suo vero punto di vista. Pria di quell'epoca le portate non venivano stimate che in ragione delle ampiezze solamente degli alvei. Fu dopo il risorgimento delle scienze che questo illustre discepolo di Galileo, fecesi il primo a pensare che la quantità dell'acqua scorrente per la sezione trasversale dell'alveo dee riuscirvi tanto maggiore quanto più velocemente vi passa; e perciò il primo che conobbe il bisogno di un secondo elemento fondamentale nel calcolo delle portate. Quindi comprovando *a posteriori* con delle esperienze eseguite in piccioli canali artefatti la realità del suo concetto, annunziò nel 1640, nella sua *misura delle acque correnti* il general teorema, che in un fiume scorrente con moto regolare e costante, o come suol dirsi ridotto allo stato di sua permanenza, le portate delle sue diverse sezioni sono costantemente le stesse, nonostante la diversa loro grandezza; teorema che dimostra essere le ampiezze delle sezioni in ragione inversa della quantità del fluido che vi passa, epperò della velocità. Supposto con questo teorema di essere le portate funzioni non più delle sole grandezze

delle sezioni, ma di esse insieme e delle velocità, ne venne che tutta la difficoltà del problema si riducesse alla ricerca della legge onde questi due elementi vi concorrono, ed al metodo di calcolarli. Il Castelli annunciando l' essenziale concorrenza della velocità nella ricerca delle portate, ne divisò in generale la legge nella ragione delle altezze dell' acqua sul fondo; legge alla quale il Guglielmini sostituì nel 1719 quella della ragion sudduplicata: ma questa legge per le inesatte maniere ond' era stata conchiusa, aspettava il fatto dell' esperimento per essere sanzionata e sotto l' una e sotto l' altra espressione.

2. I fiumi possono essere liberi o impediti. Considerando il caso dei fiumi liberi o supposti possibilmente tali, le stille fluide animate l' una indipendentemente dall'altra, dalle sole forze sollecitanti, intrinseca l' una proveniente dal proprio peso, ed estrinseca l' altra da quello delle stille contermini, non passeranno pe' diversi punti della medesima sezione che con delle velocità decrescenti costanti crescenti dalla superficie al fondo dice il Bonati, secondo che dessa è convergente parallela divergente al medesimo. Contemplando poi i fiumi impediti da resistenze regolari e uniformi, l'attrito e l'adesione del fluido alle pareti dell'alveo, ritardando il movimento de' filetti ad essa contigui, e questo ritardo per l' imperfetta fluidità comunicandosi dall' uno all'altro filetto, verrà a rallentarne via via il movimento dalla superficie al fondo e dal filone alle sponde: e quindi la velocità regolarmente ineguale ne risulterà sopra i diversi punti della sezione. Considerando finalmente il caso dei fiumi impediti da resistenze irregolari e difformi, come

le irregolarità e le asprezze del letto, i ringorghi, le tortuosità ed altri tali, quei filetti si verranno a rallentare inegualmente secondo la varia e diversa azione degl' impedimenti locali, e la loro velocità relativa vi riuscirà senza regola e senza legge. Prendendo dunque *a priori* il problema del movimento dei fiumi, si arriva sempre a conchiuderne che i filamenti capillari del fluido in generale si presentano simultaneamente ad una medesima sezione con velocità disuguali. La somma di tutte queste velocità elementari; o per meglio dire, la loro risultante, è che forma la velocità assoluta onde si misura la quantità di fluido che passa nell' unità di tempo per una data sezione; la portata fisica io dico di quella località. Tutta la difficoltà perciò del problema non si riduce che alla ricerca di questa risultante. Ma come effettuarla? Chi non sente la somma difficoltà, difficoltà inaccessibile direi, che ad un siffatto punto di vista presentasi? Quello in cui di definire si tratterebbe le infinite velocità individuali degli infiniti filamenti fluidi che contemporaneamente passano per gli infiniti punti della sezione? E supposta vinta questa difficoltà, come vincerne quell' altra non picciola, proveniente dall' insufficienza de' mezzi a poterle riunire e comporre in una; nella portata fisica? La teoria non sa coi suoi metodi trovarvi una strada che spunti. La sola esperienza potrà guidare in cotesto cammino: mostrare come si comparte l' effetto totale de' diversi variati impedimenti, non conosciuti da noi che *a posteriori* e all' ingrosso: come la velocità procede dalla superficie al fondo e dal filone alle ripe: e come l' effetto risultante stimarse-

ne nel suo tutto. Queste ed altre tali non piccole difficoltà sono state onde gli idrometri han dovuto torcere il cammino: ed invece di cercare direttamente la portata fisica mediante la velocità assoluta, che sarebbe la vera soluzione diretta e *a priori* del problema, si sono dati ad investigarla indirettamente, e in una maniera razionale e matematica. Supponendo divisa la portata per l' area della sezione, è chiaro che avrassi nel quoziente una velocità che supposta ripetuta per tutti i punti della medesima, riprodurrà colla riunione la portata stessa. Questa velocità minore della massima, maggiore della minima, media dico tra quella del filone e la rasente il fondo e le ripe; che non ha esistenza reale come la ragione insieme e l'esperienza c'insegnano che in un solo punto della sezione, questa velocità ripeto, è quella che gli idrometri si son dati a cercare sotto il nome di *velocità media*, onde moltiplicandola per l'area della sezione averne una portata equivalente alla vera reale. Quindi il tutto non si riduce che alla determinazione di cotesti due elementi: *area della sezione e velocità media*. Ma ciò non lascia di presentare anch' esso delle grandi difficoltà. Nei canali artificiali la conoscenza della sezione non dipende che dalla semplice e nuda mensurazione grafica: in quelli naturali ed a fluido scorrente non è per l' ordinario sì facile: bisogna in questo caso ricorrere a qualche artificio: ricorrere alle volte a qualche ipotesi; condizionarne il caso a de' risultati soltanto approssimati: potrebbe farsi dipendere pure da teoria; usarvi della geometria dello spazio: ma ciò non sarebbe che una mera specolazione, un lusso di scien-

za, una erudizione senza niente poterne sperare in pro della pratica. Molto maggiori poi sono le difficoltà che presenta la determinazione della velocità media. Questa ricerca rimane tuttora senza teoria rigorosa e generale, onde effettuarsi *a priori*; senza metodo sperimentale deciso ed esatto, onde definirsi *a posteriori*: e resta ancora agli idrometri un campo aperto onde mostrare ed esercitare il loro genio in condurla ne' diversi casi particolari.

3. Le acque correnti per la superficie terrestre dalla circostanza del pendìo favorite si riuniscono in massa; si aprono da se o per opera dell' arte un cammino e si formano un letto. Questo letto, l'alveo io dico, inclinato sempre all' orizzonte, ne rende per la gravità il corso accelerato; corso che andrebbe sempre più accelerandosi se le resistenze che esso vi oppone, non venissero a ritardarnelo. Questa combinazione di forze acceleratrice e ritardatrici dopo un certo spazio, fa che il corso dell' acqua divenga uniforme ed equabile, permanente e perenne: e questo stato verrebbe costantemente a mantenersi se delle cause esteriori, tali che quelle ne' tratti vicini all'origine ed allo sbocco, quelle producenti rigurgiti, la confluenza di nuove acque, le epoche del crescere e del loro calare, come l'esperienza a sufficienza dimostra, non venissero ad alterarvelo. Or è questo stato di permanenza che fa d' uopo contemplare onde riuscire nelle ricerche proposte. È desso quello in effetto a cui gli idrometri si sono tutti dati a studiare: quello a cui ridotti si sono come in bilancia, tutti gli accidenti che possono accorrervi; tutte le metamorfosi de' tratti alterati: quello infine a cui

mirano tutte le teorie sull'assunto immaginate e prodotte. Quindi venendo noi della velocità a trattare, non intenderemo parlare che di questo stato, sempre che non saremo per avvertirne il contrario.

Due sono i metodi idrometrici che si possono seguire: l'uno *a priori* l'altro *a posteriori*. Il primo procede piegando i principj scientifici sul caso speciale del movimento proposto, mettendo a calcolo le circostanze fisiche che lo accompagnano: ed il secondo l'osservazione consultando e l'esperienza. Non potendo tenersi conto delle qualità fisiche della questione senza consultarne la natura, il primo chiama in soccorso l'esperienza, e ne usa come un soggetto secondario; e il secondo come un soggetto primario, come di base onde fondarvi: in quello l'esperienza serve il ragionamento e il calcolo; mentre in questo è il ragionamento ed il calcolo che servono l'esperienza: insomma il primo forma una teoria fisico-matematica stabilita su i principj rigorosi della meccanica, illustrata e rettificata co' fenomeni dell'esperienza; ed il secondo un metodo costituisce tutto sperimentale. Dividerò dunque in due parti la proposta discussione. Terrò ragione nella prima dei travagli utili fatti a riguardo della ricerca fisico-matematica della velocità; e riserverò alla seconda il parlare de' metodi pratici e sperimentali che vi si rapportano.

PRIMA PARTE

RICERCHE FISICO-MATEMATICHE SULLA VELOCITA' DELLE ACQUE CORRENTI PER GLI ALVEI.



4. La teoria del moto de' fluidi è si mancante ed imperfetta che non dà a sperare di poterne ottenere nell' attuale periodo della scienza alcuna utile conoscenza. Lagrange nel 1787, ne ha dato nella sua meccanica analitica una generale. Secondo le sue vedute sublimi in oggi generalmente adottate, una massa fluida è considerata come un corpo le di cui molecole sciolte e libere da ogni vincolo di tenacità, coesistono l' una indipendentemente dall' altra in continuità. Quindi tenendo dietro a' passi della soluzione matematica e *a priori* della questione, noi non seguiremo che questo punto di vista sì generale ed esteso; punto di vista in cui supponendo ciascuna molecola elementare sottoposta all' azione di forze che la sollecitano al moto, e rapportandone il movimento qualunque siasi che ne risulta a tre piani coordinati ortogonali, si è pervenuto con de' processi più o meno variati nell' andamento analitico a delle equazioni differenziali che ne rappresentano le circostanze. Senza entrare ne' dettagli di cotesti processi perchè molto conosciuti, ci basta di riferire che dicendo φ, p, v, la forza acceleratrice la pressione e la velocità, delle quali $\varphi', \varphi'', \varphi'''; p', p'', p'''; v', v'', v'''$; ne significano le componenti secondo le tre coordinate x, y, z: e dicendo q la densità del fluido, se

ne hanno per la soluzione generale del problema le due equazioni

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{dqv'}{dx}\right)+\left(\frac{dqv''}{dy}\right)+\left(\frac{dqv'''}{dz}\right)=0$$

$$\left(\frac{dp'}{dx}\right)dx+\left(\frac{dp''}{dy}\right)dy+\left(\frac{dp'''}{dz}\right)dz=$$

$$q\,(\varphi' dx+\varphi'' dy+\varphi''' dz)-q\,(v'dv'+v''dv''+v'''dv''')$$

equazione che pe' fluidi incomplessibili ed omogenei a' quali il nostro assunto appartiene, e pe' quali la densità q è costante ed $=1$ si riducono alle due seguenti

$$\left(\frac{dv'}{dx}\right)+\left(\frac{dv''}{dy}\right)+\left(\frac{dv'''}{dz}\right)=0$$

$$\left(\frac{dp'}{dx}\right)dx+\left(\frac{dp''}{dy}\right)dy+\left(\frac{dp'''}{dz}\right)dz\,(=dp)=$$

$$\varphi' dx+\varphi'' dy+\varphi''' dz-(v' dv'+v'' dv''+v''' dv'''$$

equazioni delle quali la prima è comunemente detta *della continuità* o altrimenti dal prof. Tadini *della inalterabilità della massa ;* e la seconda *delle forze sollecitanti.*

Nella discussione analitica di queste due equazioni, è che consiste la teoria generale di cui si tratta : e tutta la difficoltà non si riduce che nello integrarle e determinarvi le funzioni arbitrarie che il processo dell' integrazione vi introduce ; difficoltà grandissima dice il professore Venturoli ; e se stiamo nella somma generalità, ancora insuperabile. In effetto supposte $v'=\Phi'_x$, $v''=\Phi''_y$, $v'''=\Phi'''_z$; che è quanto dire $d\Phi=v'dx+v''dy+v'''dz$ una fun·

zione differenziale esatta, si avrà la prima trafformata nell' equazione differenziale parziale di secondo ordine

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\Phi}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right)=0\,,$$

ovvero che è lo stesso

$$\Phi''_x+\Phi''_y+\Phi''_z=0$$

equazione conosciuta da' geometri sotto il nome di equazione dei fluidi; equazione in cui v', v'', v''', sono delle funzioni di x, y, z, t per esservelo v da cui dipendono, epperò anche tale la funzione Φ. E la seconda presa la t divisamente, epperò dv', dv'', dv''', come differenziali esatte di x, y, z solamente, prende l' aspetto

$$dp=\varphi' dx+\varphi'' dy+\varphi''' dz-\tfrac{1}{2}\, d\left(v'^2+v''^2+v'''^2\right)$$
$$-\left(v'\left(\frac{dv'}{dt}\right) dt+v''\left(\frac{dv''}{dt}\right) dt+v'''\left(\frac{dv'''}{dt}\right) dt\right)$$

che per essere

$$v'\, dt=dx,\ v'=\left(\frac{d\Phi}{dx}\right),\ \text{epperò}\ v'\left(\frac{dv'}{dt}\right) dt=\frac{1}{dt}\, d\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) dx$$

è così similmente rapporto a v'', v''' se ne avrà

$$v'\left(\frac{dv'}{dt}\right) dt+v''\left(\frac{dv''}{dt}\right) dt+v'''\left(\frac{dv'''}{dt}\right) dt=$$

$$\frac{1}{dt}\left(d\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) dx+d\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) dy+d\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) dz\right)=d\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$$

e perciò sostituendo

$$dp = \varphi' dx + \varphi'' dy + \varphi''' dz - d\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) - \frac{1}{2} d\left(v'^2 + v''^2 + v'''^2\right)$$

e quindi supponendo che $\varphi' dx + \varphi'' dy + \varphi''' dz (= d\text{f})$ fosse una differenziale esatta di x, y, z; ed integrando si avrà

$$p = \text{f} - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left(v'^2 + v''^2 + v'''^2\right)$$

Onde è che la teoria generale che si è data finora sul movimento de' fluidi incomplessibili omogenei, va soggetta alla condizione che le due funzioni segnate con $d\Phi$, $d\text{f}$ sieno differenziali esatte; o che è lo stesso che le due funzioni Φ, f abbiano un essere effettivo, e perciò capaci di determinazione. Quindi avviene che essa non appartiene che a quegli individui di questa famiglia di fluidi pei quali cosiffatta condizione avrà luogo. Or la forza sollecitante φ fatta astrazione delle resistenze, è nel caso in questione sempre una forza attiva della natura che per l' ordinario, e specialmente per le acque, si stima per la sola gravità; epperò la funzione f riesce in questo caso sempre assegnabile. Tutta la difficoltà dunque non va ridotta che ad esserlo la funzione Φ. Lagrange e dietro a lui la comune dei classici che ne hanno parlato, sono d'opinione che i casi nei quali questa funzione si trova possibile sono in natura numerosissimi. Ma questa opinione è stata attaccata di fronte dal Tadini in una insigne memoria da lui pubblicata sul movimento delle acque correnti in Milano nel 1816; memoria ove egli venne di proposito con una nota posta in fine, non solo a

confutare i varj casi conosciuti che Lagrange il primo avea rimarcato sulla possibilità di quella funzione, e a'quali il Venturoli pensa che riducansi quelli ordinariamente occorrenti nella comune idrometria, ma ancora sostiene con energia che rarissime volte potrà verificarsi la voluta possibilità relativamente ai fluidi in discorso. L'esame di questa controversia non può avere qui luogo: e noi ci facciamo solo a riflettere che qualunque ne potesse essere il giudizio che se ne potrebbe portare in risultato, basta al nostro assunto quanto il Tadini stesso ha nella sua discussione conchiuso. Egli ha finito di dirvi che quando si tratta delle acque correnti in particolare, acque alle quali il nostro assunto appartiene, il calcolo del loro movimento potrà sempre bene istituirsi sull'ipotesi che Φ sia capace di essere assegnata, e che questo calcolo potrà sempre adottarsi per la determinazione de' fenomeni principali del loro corso.

Ma per la soluzione del problema non basta sapere che Φ esista; bisogna ancora assegnarla, integrando l'equazione de' fluidi; poichè è da essa che dipende la determinazione di v', v'', v''', epperò di v; e quindi mercè le tre equazioni del movimento di cui si parla

$$\varphi' - \left(\frac{dp'}{dx}\right) = \frac{dv'}{dt},\ \varphi'' - \left(\frac{dp''}{dy}\right) = \frac{dv''}{dt},\ \varphi''' - \left(\frac{dp'''}{dz}\right) = \left(\frac{dv'''}{dt}\right)$$

la determinazione di p', p'', p''', epperò di p. Intanto l'integrazione di questa equazione è stata in diversi modi tentata e discussa: ma la difficoltà di determinarvi le funzioni arbitrarie che il processo

porta ne' risultati, e dall'indole particolare della questione dipendono, forma il più forte scoglio contro di cui si vanno maggiormente a rompere e ad arrestarsi tutti i tentativi.

5. Lagrange dando nella sua Meccanica analitica la teoria di cui è parola, non venne punto a discutere direttamente e in generale questa integrazione, non essendovi alcun metodo conosciuto egli dice onde vi si possa soddisfare: e venendo egli a talune applicazioni speciali della teoria, non vi ha applicato che il metodo d'integrazione per approsimazione; e ciò ancora nell' ipotesi che una delle tre coordinate fosse picciolissima rapporto alle altre due, tale che il caso di una massa fluida scorrente per canali pochissimo profondi, e quello in particolare del movimento delle onde. Laplace Poisson e gli altri tutti che le divisate vedute si son fatti a seguire, non sono punto entrati ad interloquirne. E il Venturoli a questo proposito ci dice, che la soluzione di quell'equazione non può coi noti metodi compiutamente effettuarsi. Paserval ha preso a trattarla di proposito: e per quanto ne rapporta il Tadini, è arrivato con un metodo assai ingegnoso a rappresentarne la funzione ϕ con una formola integrale abbracciante degli archi di cerchio e delle funzioni arbitrarie delle quantità $x \pm y\sqrt{-1}$; formola per la quale potrá vedersi la *Meccanica filosofica di Prony* (pag. 344 e seg.)

Ma l'insufficienza de' metodi conosciuti a riguardo della determinazione di coteste funzioni, che vi sono combinate sotto il vincolo del segno integrale, e il non potersi altronde eliminarvisi questo vincolo sen-

za che si fosse prima eseguita quella determinazione, ne è venuto che nessuna utilità se ne avesse potuto ritrarre, e che fosse essa riguardata come più inaccessibile direi della stessa equazione che si propone di risolvere. Il Tadini venne poi egli stesso a discuterla di proposito. Ma egli non si è attenuto che al metodo d'integrazione per approssimazione da Lagrange seguito; e che io vengo brevemente a mettere sottocchi, usando dei segni che ho fin dal 1814 proposto in uno *Opuscolo sul nuovo algoritmo del calcolo differenziale*, e adottato in seguito nelle mie *Lezioni di matematica sublime*, onde produrla sotto un' espressione più convenevole ed esatta.

In effetto sviluppando mediante la nota formola di Maclaurin la funzione $\Phi(x, y, z)$ per z, sene avrà

$$\Phi(x.y,z)=\Phi(x,y,0)+z\Phi'_z(x,y,0)+\frac{z^2}{2}\Phi''_z(x,y,0)+\frac{z^3}{2\cdot3}\Phi'''_z(x,y,0)$$
$$+ \text{ec. ec.}$$

ovvero notando con F, f, A, B, ec. i coefficienti del secondo membro

$$\Phi(x,y,z)=F+z\mathrm{f}+\frac{z^2}{2}A+\frac{z^3}{2.3}B+\cdots$$

Quindi formandone le funzioni Φ''_x, Φ''_y, Φ''_z, e sostituendo nell'equazione proposta si avrà

$$F''_x+F''_y+A+z(\mathrm{f}''_x+\mathrm{f}''_y+B)+\frac{z^2}{2}(A''_x+A''_y+C)+\cdots=0$$

da cui pel noto principio della separazione delle quantità indipendenti si avrà

$$A=-(F''_x+F''_y),\ B=-(\mathrm{f}''_x+\mathrm{f}''_y),\ C=-(F''''_x+2F^{2,2}_{x,y}+F''''_y),\ \text{ec.}$$

epperò

$$\Phi(x,y,z) = F + z\mathrm{f} - \frac{z^2}{2}(F''_x + F''_y) - \frac{z^2}{2.3}(\mathrm{f}''_x + \mathrm{f}''_y) - \text{ec.}$$

espressione non dipendente che dalle sole due funzioni F, f.

Si sviluppino nello stesso modo queste due funzioni per y, si avrà

$$\Phi(x,y,o)(=F) = F(x,o) + yF'_y(x,o) + \frac{y^2}{2}F''_y(x,o) + \cdots$$

$$\Phi'_z(x,y,o)(=\mathrm{f}) = \mathrm{f}(x,o) + y\,\mathrm{f}'_y(x,o) + \frac{y^2}{2}\mathrm{f}''_y(x,o) + \cdots$$

Quindi formando le derivate F''_x, F''_y, ec; f''_x, f''_y, ec. sostituendo ed ordinando alle dimensioni ascendenti di y, z si avrà

$$\Phi(x,y,z) =$$

$$F(x,o) + y\,F'_y(x,o) + \frac{y^2}{2}F''_y(x,o) + \frac{y^3}{2.3}F'''_y(x,o) + \cdots$$

$$+ z\,\mathrm{f}(x,o) + yz\,\mathrm{f}'_y(x,o) + \frac{zy^2}{2}\mathrm{f}''_y(x,o) + \cdots$$

$$- \frac{z^2}{2}F''(x,o) - \frac{z^2y}{2}F^{1,2}_{y,x}(x,o) - \cdots$$

$$- \frac{z^2}{2}F''_y(x,o) - \frac{z^2y}{2}F'''_y(x,o) - \cdots$$

$$- \frac{z^3}{2.3}\mathrm{f}''(x,o) - \cdots$$

$$- \frac{z^3}{2.3}\mathrm{f}''_y(x,o) - \cdots$$

$$- \cdots$$

Questa formola che rappresenta in ultimo risultato lo sviluppo della funzione ternovariabile cercata Φ non è stata discussa dal Tadini che con de'segni, l'insufficienza della di cui significazione è stata da me rimarcata nel testè citato mio opuscolo, discutendovi il bisogno di un cangiamento nella notazione lagrangiana, quando dalle funzioni unovariabili si passava alle multovariabili; bisogno inteso dal suo medesimo autore, tanto che a cangiarla lo portò in breve periodo di tempo per quattro replicate volte senza punto ottenerne il proposto fine. Quello dico di una significazione espressa marcata distinta. Intanto essa dipende dalle due funzioni arbitrarie ad una variabile $F(x, o)$, $f(x, o)$ e dalle loro funzioni derivate, le quali provenienti dalla funzione cercata Φ, vi sono incognite. Quindi la ricerca di questa funzione può ripetersi da questa formola, assumendovi quelle due funzioni come arbitrarie, e cercandovene la determinazione sotto le condizioni particolari del problema. Ma tutta la difficoltà si riduce a questa determinazione; determinazione alla quale il Tadini punto non è venuto in compimento della soluzione, solo essendosi contentato in conchiudendo, di annunciarne la malagevolezza, e prometterne in altra occasione il metodo ond'egli siasi inoltrato ci dice in cotesto ginepraio non senza qualche riuscita.

6. Intanto nella discussione critica in cui siamo, non sembra fuori proposito il ricordare, che l'equazione de' fluidi non è che un caso particolare dell'equazione generale a differenziali parziali di secondo ordine a quattro variabili

$$A\,\Phi''_{x}+B\,\Phi''_{y}+C\,\Phi''_{z}+D\,\Phi''_{x,y}+E\,\Phi''_{x,z}+F\,\Phi''_{y,z}-V=0$$

nella quale i coefficienti A, B, C ec. funzioni delle variabili e dei coefficienti differenziali parziali di primo ordine, sono nel nostro caso costanti, e in particolare i primi tre = 1, e gli altri quattro = 0. Ma il metodo conosciuto d'integrazione per questa equazione non è interamente generale. Conduce esso un processo analitico che va condizionato alla data di una certa relazione fra i coefficienti che nel caso della nostra equazione punto non si verifica; e perciò viene a farci conchiudere che essa neanche sia per questa banda integrabile. Non è mio oggetto l'entrare in dettaglio sulla verità di questa proposizione: potrà rilevarsi nel calcolo di Lacroix (n.757), ove ritrovasi esposto il metodo in discorso colla più soddisfacente estensione.

7. L'inaccessibile difficoltà di questa integrazione sembrami che avesse potuto far nascere a M. Navier l'idea di cangiar direzione onde risolvere il problema. In una memoria presentata all' Istituto e nel tomo sesto de' suoi Atti inserita *Sopra le leggi del movimento dei fluidi*, questo idraulico sommo ha dato una nuova teoria conducente a delle formole nuove per riuscirvi. Ma il principio onde l'ha tirata, oltre di non essere da lui stesso proposto che come una ipotesi da sottomettersi all'esperienza per la sanzione, non potrà a giudizio di M. Agostino Cauchy, essere convenevole che al caso dei fluidi elastici, non mai de' liquidi a' quali mira. E le formole alle quali è pervenuto, diverse delle ordinarie, sono sì complicate che nelle applicazioni numeriche che egli ne ha fatto per comprovarle *a posteriori*, ha dovuto per ottenerne dei risultati approssimati, accumularvi una

moltiplicità indicibile di supposizioni particolari e di semplicizzazioni; moltiplicità che ci mostra la di lui ammirevole attitudine e facilità nel maneggio dell' analisi, ma che ragione non gli dà a pronunciare con sicurezza sul metodo della sua fisica teoria. Quindi sembra che questa nuova teoria non desse maggior motivo di riguardare come meno empirica di prima la condotta e la distribuzione dei fluidi; proposizione che il Cauchy ha avanzato in forma di quesito, al quale ha egli risposto dicendo di non volerne azzardare la soluzione, e raccomandando la lettura della memoria a tutte quelle persone alle quali questo genere di applicazione interessa.

8. Il problema dunque del movimento de' fluidi nel caso particolare eziandio di quelli incomplessibili e omogenei in cui tanto si simplifica, preso *a priori* e nella maggiore generalità, è riuscito finora trascendente a' geometri in darsene una soluzione completa. Quindi è che si abbia dovuto rivolgere il cammino; e da quello di una soluzione generale da piegarsi sulle diverse specie di fluidi che la natura ci mette sottocchi, soluzione che ne sarebbe la vera *a priori* e diretta, si è dovuto venire ad uno più o meno limitato in ragione della difficoltà del soggetto; contemplarne i fenomeni proprj e particolari; e colla guida dell' esperienza e del ragionamento cercarne nell' indole stessa del caso la soluzione. Ma fortunatamente avviene dice il sempre lodato Venturoli, che i fluidi de' quali il più ci interessa conoscerne il movimento, possono quasi tutti ridursi ad un solo e medesimo genere, che sotto il nome si conosce di movimento lineare. La natura di questo movimento

è da lui supposta tale, che tutte le stille di una medesima sezione vi sono supposte camminare allo incirca con egual velocità e parallelamente al suo asse o direttrice; e perciò può geometricamente rappresentarsi col movimento di una sezione fluida che procede lungo e normalmente al medesimo. In questo genere dunque di movimento riuscendo nulla in senso trasversale, e solo effettiva in senso verticale e per lunghezza la velocità delle molecole fluide, ne avviene che possa sempre concepirsi effettuato a velamenti paralleli a quello che passa a piombo per l' asse. Onde per essere supposto rettilineo l' asse, cotesti velamenti saranno piani e verticali, e il movimento molecolare perciò a due coordinate. Ma la ipotesi potrebbe dirsi col Tadini di un movimento siffatto su di cui i geometri son soliti fondare i loro calcoli, è inesatta e fallace; proposizione che la teoria generale e rigorosa del movimento a due coordinate addimostra *a priori*.

9. In effetto per véderlo si richiami al bisogno questa teoria: ed a tale oggetto si supponga costante la coordinata y. L' equazione dei fluidi del problema generale (4) diviene per questo caso $\Phi''_x + \Phi''_z = 0$ la quale integrata dà (mie Lezioni t. 2. n. 125.. 127) $\Phi = \varphi(z - x\sqrt{-1}) + \psi(z + x\sqrt{-1})$ per integrale, abbracciante le due funzioni arbitrarie φ, ψ, che bisogna determinare per la piena soluzione del problema, ricorrendo a delle condizioni particolari altronde date, e che esso non lascerà punto di dare essendo un problema determinato. Intanto potrebbe restringersi l' in-

determinazione di questo risultato meramente analitico senza particolarizzare la questione, giovandosi di una circostanza che la sua natura fisica esibisce da una altra banda come una specie di condizione. Faremo questo rimarco dopo l' intera esposizione della sua soluzione analitica e diretta.

Fatto per semplicità $p = z - x\sqrt{-1}$, $q = z + x\sqrt{-1}$, sarà $\Phi = \varphi p + \psi q$; epperò $d\Phi = (\frac{d\varphi}{dp})\, dp + (\frac{d\psi}{dq})\, dq$, ovvero segnate con α, β le funzioni arbitrarie $(\frac{d\varphi}{dp})$ di $z - x\sqrt{-1}$, $(\frac{d\psi}{dq})$ di $z + x\sqrt{-1}$ si avrà

$$d\Phi = \alpha\, dp + \beta\, dq;\ \mathrm{e}\ \Phi'_x = \alpha\,(\frac{dp}{dx}) + \beta\,(\frac{dq}{dx}) = (\beta - \alpha)\sqrt{-1}$$

$$\Phi'_z = \alpha\,(\frac{dp}{dz}) + \beta\,(\frac{dq}{dz}) = \alpha + \beta$$

Quindi (4) ne risultano i due elementi *velocità e pressione* del movimento molecolare

$$v = \sqrt{v'^2 + v'''^2} = \sqrt{\Phi'^2_x + \Phi'^2_z} = 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$p = f - \Phi'_t - \frac{1}{2}(v'^2 + v'''^2) = f - \Phi'_t - 2\alpha\beta$$

e finalmente

$$\frac{dx}{dt}(= v') = (\beta - \alpha)\sqrt{-1},\ \frac{dz}{dt}(= v''') = \alpha + \beta$$

epperò eliminando dt si avrà l' equazione

$$\alpha\,(dx + dz\sqrt{-1}) + \beta\,(dx - dz\sqrt{-1}) = 0$$

per quella della linea di moto della molecola flui-

da avente x, z per coordinate, che moltiplicata per $\sqrt{-1}$ si trasforma nella

$$\alpha\,(dz - dx\sqrt{-1}) - \beta\,(dz + dx\sqrt{-1}) = 0$$

Resta la determinazione delle funzioni α, β. A talë oggetto uopo è particolarizzare la questione onde averne le condizioni necessarie all' effetto. Finora abbiamo considerato il movimento in piena astrazione, che se sene eccettua la caduta verticale, non potrebbe aver luogo in concreto. La massa fluida per moversi e scorrere bisogna che sia sostenuta; e in questa posizione potrà considerarsi matematicamente o fisicamente, facendovi o no astrazione delle resistenze fisiche: non potrà però non tenersi conto della figura geometrica del recipiente in cui scorre, e che contribuisce sulla linea che siegue. In questo caso é il nostro assunto: si tratta del movimento per alvei, e perciò fra pareti circoscritto e ristretto; circostanza che la risorsa ci offre onde eseguire la determinazione proposta. Infatti l' equazione di cui si parla, rappresentando tutte le linee in generale dalle molecole fluide descritte, dovrà ancora rappresentarne quelle delle pareti lungo le quali il fluido scorre radendole: epperò dovrà sotto la sua rappresentanza comprendere ancora le loro equazioni analitiche, che supposte esse date, saranno sempre conosciute. La linea di moto dunque di una molecola fluida non andrà dipendente da quella sola equazione, ma dal sistema di essa e delle due delle pareti; sistema da cui eliminando una delle due coordinate si ristringerà a due solamente, che daranno in fun-

zione dell' altra le due funzioni cercate α, β. Supponendo dunque date fra queste due coordinate le equazioni $x=\text{F}z$, $x=\Psi z$ delle pareti, e sostituendole nell'equazione generale trovata, se ne avranno le due

$$\left(\frac{1-\text{F}'z\sqrt{-1}}{1+\text{F}'z\sqrt{-1}}\right).\alpha(z-\text{F}z\sqrt{-1})-\beta(z+\text{F}z\sqrt{-1})=0$$

$$\left(\frac{1-\Psi'z\sqrt{-1}}{1+\Psi'z\sqrt{-1}}\right).\alpha(z-\Psi z\sqrt{-1})-\beta(z+\Psi z\sqrt{-1})=0$$

ovvero notando con M, N i due fattori fratti

$$\text{M}.\alpha(z-\text{F}z\sqrt{-1})-\beta(z+\text{F}z\sqrt{-1})=0$$

$$\text{N}.\alpha(z-\Psi z\sqrt{-1})-\beta(z+\Psi z\sqrt{-1})=0$$

equazioni dalle quali potrà dedursi la conoscenza proposta delle due funzioni α, β.

Stando dietro al punto di vista preso di mira dal Venturoli onde arrivarvi, si assumi per z una funzione tale ei dice di z, che sostituita in sua vece si venga a convertire $z-\text{F}z\sqrt{-1}$ in $z-\Psi z\sqrt{-1}$; e supposto che con questa sostituzione M, $z+\text{F}z\sqrt{-1}$ divengano M', $z+\text{F}_1 z\sqrt{-1}$, si avranno le due equazioni trasformate nelle

$$\text{M}'.\alpha(z-\Psi z\sqrt{-1})-\beta(z+\text{F}_1 z\sqrt{-1})=0$$

$$\text{N}.\alpha(z-\Psi z\sqrt{-1})-\beta(z+\Psi z\sqrt{-1})=0$$

Donde eliminando α se ne avrà l'equazione

$$\text{N}.\beta(z+\text{F}_1 z\sqrt{-1})-\text{M}'.\beta(z+\Psi z\sqrt{-1})=0$$

che porterà alla conoscenza di β.

Similmente assumendo per z una funzione di z tale che posta nella prima ancora vi trasmuti $z + Fz\sqrt{-1}$ in $z+\Psi z\sqrt{-1}$; e supposto che con ciò M, $z - Fz\sqrt{-1}$ divengano M'', $z - F_2 z\sqrt{-1}$; le due equazioni diverranno

$$M''. \alpha(z - F_2 z\sqrt{-1}) - \beta(z + \Psi z\sqrt{-1}) = 0$$

$$N. \alpha(z - \Psi z\sqrt{-1}) - \beta(z + \Psi z\sqrt{-1}) = 0$$

fra le quali operata l' eliminazione di β daranno la equazione unica

$$N. \alpha(z - \Psi z\sqrt{-1}) - M''. \alpha(z - F_2 z\sqrt{-1}) = 0$$

che ci condurrà similmente alla ricognizione di α.

In fatti facendo nella prima delle due equazioni così trovate

$$z+\Psi z\sqrt{-1}=u, z+F_1 z\sqrt{-1}=u+\Delta u; \text{ epperò } \Delta u=(F_1 z-\Psi z)\sqrt{-1}$$

e nella seconda

$$z-\Psi z\sqrt{-1}=u', z-F_2 z\sqrt{-1}=u'+\Delta u'; \text{epperò } \Delta u'=(\Psi z-F_2 z)\sqrt{-1}$$

se ne avranno le due equazioni

$$N. \beta(u+\Delta u) - M'. \beta(u) = 0$$
$$M''. \beta(u'+\Delta u') - N. \alpha(u') = 0$$

alle differenze del primo ordine a coefficienti ed a differenze variabili, e col secondo membro nullo;

equazioni che integrate ci manifesteranno coi loro integrali le due funzioni in questione.

Questo è il processo che il Venturoli ha seguito nell'edizione del 1817 dei suoi elementi per la determinazione generale delle due funzioni arbitrarie completante la teoria analitica di cui si tratta; processo che ho io rapportato seguendolo con qualche dettaglio, onde mostrarne l'acuto e sagace pensamento dell'autore; processo dico che egli ha quindi portato sul caso speciale del movimento fra pareti rettilinee; e che lo ha condotto a dei risultati da lui prima ottenuti nell'edizione anteriore del 1810, i quali per quanto egli stesso ne dice, colla permutazione delle coordinate riduconsi a quelli che il Tadini nel 1816 ha dato con altro metodo nella sua citata memoria. Ma questo scritto non comporta che si scenda a cotante particolarità: quindi vengo al rimarco promesso di sopra che presenta il prospetto di una nuova e più semplice soluzione.

L'integrale $\Phi = \varphi(z - x\sqrt{-1}) + \psi(z + x\sqrt{-1})$ che il processo analitico ci ha dato sotto la forma ordinaria di un integrale completo con due funzioni arbitrarie, potrebbe ristringersi nella sua indeterminazione. Il movimento del fluido è un fatto fisico; epperò la velocità e la funzione Φ che ne è la misura, deve essere reale. Questa condizione che la natura fisica del problema può esibirci, che non ha avuto parte alcuna in quel processo, e che perciò quell' integrale ne va indipendente, potrebbe giovarci ad eliminarne gl' immaginarj, e contribuire così alla restrizione proposta: basta svilupparne in serie le due funzioni arbitrarie per venirne convinto.

Si chiami dunque al fatto la formola di Taylor che io prendo sotto le forme lagrangiane: si facci

$$i = -x\sqrt{-1} \text{ in } \varphi,\ i = x\sqrt{-1} \text{ in } \psi; \text{ e si avrà}$$

$$\varphi(z - x\sqrt{-1}) = \varphi z - \varphi' z . x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2}\varphi'' z + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}\varphi''' z + \frac{x^4}{1.2..4}\varphi'''' z - \ldots$$

$$+ \cdots \pm \frac{x^{2n-1}\sqrt{-1}}{1.2..(2n-1)}\varphi^{2n-1} z \pm \frac{x^{2n}}{1.2..2n}\varphi^{2n} z \mp \ldots$$

$$\psi(z + x\sqrt{-1}) = \psi z + \psi' z . x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2}\psi'' z - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}\psi''' z + \frac{x^4}{1.2..4}\psi'''' z + \cdots$$

$$- \cdots \mp \frac{x^{2n-1}\sqrt{-1}}{1.2..(2n-1)}\psi^{2n-1} z \pm \frac{x^{2n}}{1.2..2n}\psi^{2n} z \mp \ldots$$

epperò $\Phi = \varphi(z - x\sqrt{-1}) + \psi(z + x\sqrt{-1}) = \varphi z + \psi z$

$$- (\varphi' z - \psi' z)\, x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2}(\varphi'' z + \psi'' z) + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}(\varphi''' z - \psi''' z) + \frac{x^4}{1..4}(\varphi'''' z + \psi'''' z)$$

$$+ \cdots \pm \frac{x^{2n-1}\sqrt{-1}}{1.2..(2n-1)}(\varphi^{2n-1} z - \psi^{2n-1} z) \pm \frac{x^{2n}}{1.2..2n}(\varphi^{2n} z + \psi^{2n} z) \mp \ldots$$

Il segno superiore è per n pari e l' inferiore per n impari.

Quindi sottomettendo questa formola alla condizione dell' esser reale, è chiaro che la parte immaginaria dovrà annullarsi da se, che è quanto dire dovrà essere

$$\varphi^{2n-1} z - \psi^{2n-1} z = 0, \text{ cioè } \varphi^{2n-1} z = \psi^{2n-1} z$$

circostanza a cui si soddisfa tutto di seguito facendo $\varphi z = \psi z$. Donde risulta che l' integrale Φ quale ci è venuto immediatamente per cosiddire dalle ma-

ni della pura analisi, e che soddisfa come si é sopra veduto alla soluzione completa e generale del problema, sottomesso alla condizione dell' esser reale che la sua natura altronde ci offre, si riduce all' espressione in serie reale ed abbracciante una sola funzione arbitraria, serie che posta in frasi simboliche può rappresentarsi colla formola

$$\Phi = 2\left(\varphi z \pm \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2..2n} \varphi^{2n} z\right)$$

Il segno superiore è per n pari e viceversa l'inferiore

Questa formola potrebbe applicarsi similmente di sopra alla determinazione dell' equazione del movimento molecolare del fluido, determinandovi la funzione arbitraria da cui andrebbe dipendente. Infatti essendo

$$\Phi'_x \left(= v' = \frac{dx}{dt}\right) = \pm 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} \varphi^{2n}$$

$$\Phi'z \left(= v''' = \frac{dz}{dt}\right) = 2\left(\varphi' \pm \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2..2n} \varphi^{2n+1}\right)$$

si avrà eliminandovi t e riducendo

$$dx\left(\varphi' \pm \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2..2n} \varphi^{2n+1}\right) \mp dz \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} \varphi^{2n} = 0$$

per quell' equazione. Resta la determinazione della funzione φ di z.

A tale oggetto si chiamino in ajuto come qui sopra le equazioni alle pareti, le quali essendo due, il problema sarà più che determinato, ed essendo una sola come nel caso delle pareti eguali, sarà de-

terminato. Ma sì nell' uno che nell' altro caso il fatto analitico della determinazione della funzione non abbisogna che di una solamente. Sia dunque $x = \Psi z$ l' equazione data dalle pareti, e sostituendo si avrà

$$\Phi'\varphi' \pm \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Psi^{2n}\Psi'}{1.2..2n}\varphi^{2n+1} \mp \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Psi^{2n-1}}{1.2..(2n-1)}\varphi^{2n} = 0$$

ovvero

$$\frac{d\left[\pm \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Psi^{2n+1}\varphi^{2n+1}}{1.2...(2n+1)}\right]}{dz} = 0$$

Se la coordinata $x = \Psi$ sarà minore della z, come generalmente si verifica dice il Tadini in natura per tutte le correnti di acqua, sarà permesso di considerarla quale quantità di un ordine ad essa inferiore presa per unità; e quindi per comoda denominazione in ordinarne le idee, di classificarne in ordini di grandezza semprepiù inferiori le potenze di mano in mano ascendenti; e così al guardo dell' approssimazione potersi questa equazione considerare a frammenti incominciando sempre dal primo membro, accumularne la considerazione dell' uno sopra quella dell' altro, ed operarvi in tal modo la determinazione di φ mercè il metodo delle successive approssimazioni, che Lagrange e Tadini hanno similmente usato in simile circostanza. Limitando dunque l' equazione al primo frammento di $n = 0$ se ne avrà $\frac{d\Psi\varphi'}{dz} = 0$; epperò $\Psi\varphi' = C$: donde $\varphi' = \frac{C}{\Psi}$ per la prima approssimazione di φ', epperò di $\varphi = C\int \frac{dz}{\Psi} + \text{Cost.}$

Formando con questa prima approssimazione di φ' mediante la differenziazione il corrispondente valore di $\varphi''' = \frac{C}{\Psi^3}(2\Psi'^2 - \Psi\Psi'')$; e limitando l' equazione al secondo frammento di $n = 1$, se ne avrà

$$\pm \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{dz} d\left(\frac{\Psi^{2n+1}\ \varphi^{2n+1}}{1.2..(2n+1)}\right) = \frac{d\Psi(2.3\varphi' - \Psi^2\varphi''')}{dz} = 0\text{: donde}$$

$\Psi(2.3.\varphi' - \Psi^2\varphi''') = C'$, epperó

$$\varphi' = \frac{1}{2.3.\Psi}(C' + \Psi^3\varphi''') = \frac{1}{2.3\Psi}(C' + 2C\Psi'^2 - C\Psi\Psi'')$$

per una seconda approssimazione. Così formando con questo più approssimato valore di φ' sottomettendolo alla differenziazione, quelli di φ''', φ^{v}, e prendendo la equazione al terzo frammento di $n = 2$, se ne avrà

$$\pm \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{dz} d\frac{\psi^{2n+1}\ \varphi^{2n+1}}{1.2..(2n+1)}) = 0\text{; ed operando come sopra}$$

si avrà φ' ad una terza approssimazione: e così di seguito, potendo arrivarsi a scoprire la legge dominatrice delle successive approsimazioni. Il progresso di questa operazione non potrà impegnare che in un calcolo prolisso soltanto e non severo e difficile: e il mio oggetto non è stato quello di dare la soluzione completa del problema, esotico percosiddire al mio assunto; ma dimostrare la maniera onde procedere con ragione direttamente e senza stento in essa, per la via dell' integrale sottomesso alla condizione di Φ reale; cosa di cui io non so che se ne sia fatto da altri menzione, e che potrebbe riuscire utile nella presente discussione critica. Quindi tralascio di più inoltrarla. Intanto la circostanza fisica del problema che con-

duce la condizione di Φ reale, e che volendo usarne può operare la divisata riduzione dell' integrale a non contenere che una sola funzione arbitraria, ha fatto pensare al testè citato Tadini senza darsi punto carico della proposizione dimostrata dal Poisson (mie Lezioni t. 3. n. 34) che un integrale in serie del secondo ordine può abbracciare egualmente una due niuna funzione arbitraria senza lasciare di essere completo, ed in opposizione a tutti gli analisti che l' integrazione dell' equazione de' fluidi hanno discusso, di essere quell' integrale particolare e non completo. Quest' idea lo portó a deviare cammino ed altra strada seguire; seguire dico un procedimento suo proprio, da lui esposto con molto dettaglio nei numeri 34.... 61 della sua citata memoria. L' assoluta e decisa sua contrapposizione a quanto se ne è detto, ne rende importante il richiamo; e ci porta a farne brevemente il rapporto.

A questo proposito osserva il Tadini che una relazione della forma $\Phi''_z = \Phi''_x$ non potrebbe aver luogo senza supporla derivata da una funzione primitiva in cui le variabili z, x vi fossero contenute nello stesso modo; e talmente che il suo differenziale risultasse sempre lo stesso tanto se vi si apponga una aggiunta all' una z quanto all' altra x; osservazione che gli ha fatto asserire che quella funzione deve essere della forma $\Phi(x+z)$. Osserva egli dippiù che quando quella relazione sarà $\Phi''_z = -\Phi''_x$ che è il caso dell' equazione de' fluidi, il segno — non può derivare che da un coefficiente $\pm\sqrt{-1}$ di x nella funzione primitiva; cioè che questa funzione biso-

gna che fosse della forma $\varphi(z-x\sqrt{-1})$, ovvero $\psi(z+x\sqrt{-1})$; donde ne conchiude l' integrale $\Phi=\varphi(z-x\sqrt{-1})+\psi(z+x\sqrt{-1})$ ei dice più compiuto de'precedenti. Questo integrale che secondo lui non è il completo, in quanto l'essere di Φ reale non celo fa vedere tale che in apparenza, essendo in sostanza della forma $\Phi=\varphi(z-x\sqrt{-1})+\varphi(z+x\sqrt{-1})$ abbracciante una sola funzione arbitraria, bisognava ricompletarsi. Quindi egli si fa ad osservare che i due integrali $\varphi(z-x\sqrt{-1})$, $\psi(z+x\sqrt{-1})$ particolari, come possono accoppiarsi col segno $+$, così lo possono pure col segno $-$; e perciò può comporsi un secondo integrale della medesima indole. Assumendo dunque egli due nuove funzioni arbitrarie $\varphi_1(z-x\sqrt{-1})$, $\psi_1(z+x\sqrt{-1})$, ed accoppiandole in quest' altro modo ne forma un secondo integrale per lui del pari particolare $\Phi=\varphi_1(z-x\sqrt{-1})-\psi_1(z+x\sqrt{-1})$, che accoppiandolo col precedente ne ottiene ei dice il completo.

$$\Phi=\varphi(z-x\sqrt{-1})+\psi(z+x\sqrt{-1})+\varphi_1(z-x\sqrt{-1})-\psi_1(z+x\sqrt{-1})$$

Intanto io non saprei comprendere come questo illustre geometra conduce cotesto suo modo di ragionare. L' accoppiamento de' due integrali φ, ψ col segno $-$, atteso l' essere interamente indeterminato delle funzioni arbitrarie che le rende capaci di tutte le forme possibili al caso, è sottinteso in quello del segno $+$; e le nuove due funzioni φ_1, ψ_1 sono per la stessa ragione contenute nelle due φ, ψ, come egli stesso ci si dà a vedere persuaso; e perciò la funzione

$\varphi_1(z - x\sqrt{-1}) - \psi_1(z + x\sqrt{-1})$ non significa in sostanza che la medesima funzione $\varphi(z - x\sqrt{-1}) + \psi(z + x\sqrt{-1})$: sembra è vero che egli prometta di legittimarlo *a posteriori* nel fatto analitico che viene quindi ad esporvi: ma questo fatto partendo dal suo punto di vista, non parmi in alcun modo interessato a svilupparlo e a darne ragione, ma bensí a soddisfarlo. Ma io lascio d'impegnarmi in questo esame, potendo non aver saputo ben penetrare il vero sentimento dell'autore: mi basta di averne fatto una marcata menzione.

Questo geometra quindi maneggiando le due parti componenti il suo integrale completo sotto la condizione dell'essere reale, viene a spogliarlo di due delle quattro funzioni arbitrarie contenutevi, e lo riduce sotto la forma

$$\Phi = \varphi(z - x\sqrt{-1}) + \varphi(z + x\sqrt{-1}) + \frac{1}{\sqrt{-1}}(\varphi_1(z - x\sqrt{-1}) - \varphi_1(z + x\sqrt{-1}))$$

Applica questo risultato in seguito alla determinazione delle due componenti della velocità secondo le due coordinate x, z; ne combina fra loro e colle due equazioni supposte date delle pareti le rappresentanze analitiche; sviluppa in serie le funzioni contenute nel risultato che ne ottiene; lo sottomette quindi al metodo delle successive approssimazioni; ed iniziandovi colla sola prima approssimazione la determinazione delle due funzioni arbitrarie, che non spinge innanzi ei dice per la prolissità del calcolo, scende al caso delle pareti rettilinee: in questo caso vi eseguisce col metodo stesso delle successive approssi-

mazioni la completa determinazione di quelle funzioni, mercè di un calcolo sempre prolisso e penoso. Tale è il metodo dal Professore Tadini seguito.

Or cade qui naturalmente sottocchio un punto di vista relativo sulla bilancia di questi due metodi che giova e conviene rimarcare.

Il Venturoli assume l' integrale dell' equazione in questione tal quale lo porge immediatamente il processo analitico dell' integrazione, sotto l' espressione d' integrale completo con due funzioni arbitrarie; e con un metodo conducendolo sì generale che elegante e sublime, perviene a conchiudervi la soluzione completa del problema fino a marcavi la determinazione delle funzioni arbitrarie], dipendente dalla integrazione di due equazioni alle differenze lineari di primo ordine: e il Tadini non vedendo in quello integrale che la sola apparenza d' integrale completo, lo caratterizza nella realità della cosa per integrale particolare ; si dà a completarlo al suo modo ; e si impegna in un processo analitico che conduce in conchiusione sulle successive approssimazioni, e sì laborioso e prolisso che in generale non ha potuto inoltrarlo al di là della prima approssimazione. Il Venturoli quindi facendosi a piegare il suo metodo sul caso delle pareti rettilinee è arrivato in una maniera pronta semplice e precisa ai risultati convenienti alla soluzione generale e completa del caso: e il Tadini piegando egualmente dalla sua banda le sue vedute sul caso medesimo , per trovare sulle vie delle successive approssimazioni gli stessi risultati , ha dovuto camminarvi un tratto sì lungo e penoso , che egli stesso in conchiudendo ha detto: *a conchiusioni sì*

semplici si potrá forse pervenire con calcoli più compendiosi. In questo stato di tanta contrapposizione qual ne sarà dunque il giudizio comparativo? Io non voglio azzardarlo: e lascio che altri con più matura critica lo proferisca.

Ma ritorniamo da questa specie di degressione, la di cui importanza in uno scritto di questa fatta ci ha trattenuto forse più del dovere: e raccogliamone quel tanto che ci abbisogna a provare la proposizione avanzata sulla conchiusione del numero precedente, che ce ne ha dato l' occasione; proposizione cioè che l' ipotesi del movimento lineare in cui le stille fluide di una medesima sezione sono supposte procedere con egual velocitá ed alla direttrice parallelamente, non è punto sanzionata dalla teoria generale. In effetto si richiamino dall' esposizione precedente le formole ivi assegnate delle due velocitá componenti v', v''' che animano una stilla fluida secondo le due coordinate longitudinale e per larghezza x, z. Queste formole sotto l' espressione

$$v'(=\Phi'_x)=(\beta-\alpha)\sqrt{-1}\,,\,v'''(=\Phi'_z)=\alpha+\beta$$

per essere α, β due funzioni di queste coordinate, ci dimostrano che v', v''' sono ancora delle funzioni tali. Quindi cangiando la posizione della stilla fluida, epperò le coordinate x, z, cangeranno con essa le sue velocità v', v''' per lunghezza e per larghezza. Onde passando la stilla da una sezione all' altra posteriore, non manterrà la stessa velocitá $v(=\sqrt{v'^2+v'''^2})$, nè la stessa distanza dall' asse di movimento; epperò

non procedendo che con velocità varia in quantità e in direzione, ci fa conchiudere col Tadini che quella ipotesi è per teoria inesatta e fallace. Ma fortunatamente quest' istessa ipotesi che presa *a priori* non ha luogo pe' fluidi in generale, si trova sanzionata e sosostenuta *a posteriori* pel caso delle acque correnti in particolare. È un fatto della natura dallo stesso Professore Tadini asserito, che in questo caso, fino nei fenomeni in grande de' fiumi, il movimento del fluido non discorda da cotesta ipotesi; e che le acque fluenti per alvei ed acquidotti, asserisce pure il Venturoli, procedono ne' tronchi non molte irregolari e maggiormente in quelli regolari, come per velamenti divisi, epperò con costante velocità ed all' asse parallelamente. Questo fenomeno che si verifica ancora nel caso in cui le sponde non sono a piombo come per l' ordinario avviene ne' fiumi, è appoggiato col fatto sperimentale dal medesimo Tadini, adducendo egli quello a tal' uopo delle aste immerse nella corrente, le quali navigando a corpo dritto e non in banda e senza inclinazione fin dappresso alle rive, dimostrano chiaramente che le particelle fluide esistenti in un medesimo piano verticale si muovono come ad esso legate; e perciò il fluido altrimente non procedere che come se rasente strisciandosi a de' piani siffatti; fatto che prova il dissenso della natura dico così dalla teoria nel caso in questione. La ipotesi dunque del movimento lineare, tuttochè discordi in generale dalla rigorosa teoria, non lascia di trovare in particolare degli oggetti di applicazione. Questa circostanza unita alla facilità che comunica alla soluzione del problema, e alla semplicità

e determinazione de' risultati a cui conduce, ne rende l'uso utile e marcato; utilità tanto più apprezzabile quanto i risultati portati a lato dell' esperienza contribuire potranno alla spiegazione approssimata dei fenomeni del movimento in questione, e portare in conchiusione a delle conseguenze proficue alla pratica. Proseguiamo dunque il racconto critico-ragionato dei progressi della soluzione fisico-matematica del problema sotto quest' altro punto di vista.

10. L'Eulero diede negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno 1769 una teoria generale del movimento de' fluidi, stabilendovi de' principj che lo portarono nel volume dell' anno appresso a dare la soluzione di un gran numero di bellissimi problemi sul movimento che egli disse lineare. Ma l' Eulero non scrisse che nella supposizione della fluidità perfetta e matematica: ed egli che colle forze della analisi era stato sempre solito di vincere le difficoltà le più inaccessibili, trascurandovi la considerazione delle resistenze fisiche che formano il più forte scoglio della questione, ci ha fatto perdere le risorse ordinarie del sublime suo genio, e ci ha reso interamente inutile il suo travaglio nel fatto delle cose. Chezy direttore della scuola di ponti e strade di Francia, fu il primo che nella teoria del movimento delle acque per gli alvei, tenne conto in una maniera degna di attenzione di coteste resistenze, e che aprì una strada perciò a potervi sorprendere il fatto e spiegarne i fenomeni. Egli supposta la totalità delle resistenze proporzionale al quadrato della velocità, che è quanto dire supposte β, v il contorno bagnato della sezione, e la velocità media, ed a un' indeterminata,

presa $\beta a v^2$ per coleste resistenze; è quindi dicendo λ, ω, r la lunghezza del canale, la caduta cioè la differenza di livello del pelo a' punti estremi, il raggio medio cioè il quoziente della sezione divisa pel suo contorno bagnato; e conducendo il ragionamento ed il calcolo col lume dell' osservazione e dell' esperimento, pervenne a rappresentare la velocità media colla semplicissima formola $v = \sqrt{\frac{gr\omega}{a\lambda}}$; formola in cui l' indeterminata a potrà sempre determinarsi col soccorso dell' esperienza sottomettendola alla prova di correnti determinate. Ma questa formola però non è abbastanza esatta onde poterne sperare de' risultati soddisfacenti alla pratica: l' ipotesi delle resistenze a cui l' autore l' ha appoggiata, si trova inesatta, e la determinazione di quell' indeterminata non si è fatta da lui dipendere che da due sole esperienze, niente bastevoli a portare ad una conveniente approssimazione.

11. Quattro anni dopo Chezy nel 1779 il Cav. Dubuat pubblicò il suo egregio lavoro de' *Principj d' Idraulica*. In questa pregievolissima opera oltre delle tante utili conoscenze che egli porge sulla dottrina delle acque correnti per canali, un segnalato numero rapporta di accurate esperienze da lui stesso eseguite in circostanze variate e diverse. Combinando quest' illustre idraulico i risultati delle sue osservazioni, pervenne a rappresentarne la velocità media con una formola analitica, che ridotta all' unità di metro si dà sotto l' espressione.

$$v = \left(\sqrt{r} - 0,016453\right)\left(\frac{\sqrt{243,7\,g}}{\sqrt{\lambda:\omega} - \frac{1}{2}\,l\,(\lambda:\omega + 1,6)} - 0,049359\right)$$

Questa formola assai più complicata di quella di Chezy, abbraccia de' radicali ed un logaritmo neperiano, il quale dice Prony sembra introdotto dall' autore più pel bisogno di soddisfare a delle esperienze date che come conseguenza di una teoria propria della natura del caso. Questa formola può soddisfare ad un numero maggiore di fatti osservati in canali di diverse dimenzioni ed in circostanze diverse di essa ; porta a risultati più approssimati; e ne è perciò di un uso più sicuro ed esteso. Ma per questo non dovrá stimarsi come abbastanza soddisfacente nelle sue applicazioni: il metodo più empirico che dommatico onde è stata trovata, la complicazione della sua costruzione analitica, non promettono di aspettarne de' risultati sempre approssimati. Intanto tuttochè il Dubuat non avesse nella ricerca della sua formola dato a vedere di avervi tenuto conto ragionato delle resistenze fisiche che tanto influiscono sul movimento dei fluidi, si sa altronde però che egli non ha punto trascurato di studiarne l' indole e la natura. Fra le altre verità idrauliche egli ci ha insegnato a questo riguardo che ne' tronchi dei fiumi non molto irregolari la somma di quelle resistenze eguaglia la quantità relativa della forza acceleratrice; verità importante nella dottrina delle acque correnti per gli alvei , e che il ragionamento conducendo su i passi della esperienza, egli rese alla certezza di un assioma. Ma il Dubuat non venne a mettere a profitto questi suoi travagli; e l' importante applicazione ne trascurò in vantaggio della ricerca cotanto utile della legge delle resistenze, e del modo di rappresentarle matematicamente. La fecondità delle sue ricerche restò ste-

rile a questo riguardo fra le sue mani : ed egli lasciò a Coulomb il fertile campo delle sue speculazioni a farne la ricca messe.

12. Quì cade opportuno di far menzione di un lavoro che nel 1784 il signor Teodoro Bonati di Ferrara, uno de' geometri italiani più distinti ed esperti nella scienza de' fiumi, ha prodotto nel secondo tomo degli Atti della società italiana sotto il titolo di *Saggio sopra una nuova teoria del movimento delle acque pei fiumi;* lavoro che per le sue nuove ed importanti vedute, e per l'accurato esame che vi si fa de' diversi metodi usati nella pratica per la misura delle acque in discorso, ha giustificato l'alta riputazione che si è acquistata a questo riguardo. Le idee che egli sviluppa in cotesta insigne produzione, compongono una teoria per quanto semplice, per altretanto agevole nella spiegazione de' fenomeni della natura sul proposito. Ha supposto l' illustre matematico di Ferrara che il fluido scorresse senza alcuno impedimento pel tratto regolare di un canale: e considerando le altezze corrispondenti ad uno stesso piano verticale delle sezioni di testa e dello sbocco divise in egual numero di particelle uguali, ha preso come un principio evidente da se, che ciascuna particella fluida spiccata da una delle divisioni superiori scorresse sino alla corrispondente inferiore per linea retta. Venendo in seguito alla considerazione delle forze operanti il movimento, egli non ne vede sollecitata ciascuna che da due sole forze; l'una intrinseca proveniente da quella porzione del proprio peso, che decomposto agisce secondo la direzione del movimento, e che è proporzionale al seno dell' angolo

della sua inclinazione all' orizzonte, e l' altra estrinseca che proviene dalla pressione delle molecole contermini, e che è proporzionale alla differenza della colonna fluida che verticalmente la sovrasta e della contermine che la precede, cioè al seno dell' angolo d' inclinazione della superficie all' orizzonte. L' azione continuamente rinnovata di queste due forze è quella che tende semprepiù ad accelerare il movimento del fluido come più si avvicina allo sbocco, ed a rendere la scala delle velocità per altezza decrescente costante crescente secondo che esso scorre con superficie convergente parallela divergente al fondo: ma ne' tratti regolari egli rimarca in particolare, che la superficie del fluido procede mantenendosi generalmente convergente e presso che parallela col fondo, epperò quella scala presso che costante: se ciò non si avvera alle volte, non è che per opera delle irregolarità e delle resistenze. Queste idee teoretiche del Bonati costituiscono come è facile vedere, il principio filosofico del movimento lineare descritto al numero (8). Ma l' illustre geometra non é venuto punto a tradurle in frasi algebriche e a metterle in equazione. Egli arrestandosi alla parte filosofica e descrittiva della sua teoria, non pensò che a comprovarla coll' esperienza: e discutendo a questo proposito i metodi e gli strumenti usati nell' Idrometria sperimentale, uno suo proprio ne propone nelle cosiddette *Aste ritrometriche;* economico nelle spese; maneggevole fin nello stato di piena; superiore a tutti i conosciuti come vedremo, in conseguirne con maggior facilità ed approssimazione il fine proposto.

13. Frattanto la pubblicazione della formola di

Chezy in funzione di una legge delle resistenze, avea dato una forte spinta agl' Idraulici a ricercarne la vera dominatrice sul movimento de' fluidi. Delle esperienze furono istituite a questo fine da tutte le parti : e Coulomb assai noto e pregevole in questo genere di ricerche, in una memoria presentata allo Istituto di Francia sull' albore di questo secolo, sostenne e col discorso e coll' esperimento che nel caso particolare delle acque correnti, uopo è rappresentare cotesta legge con una funzione razionale a due termini della velocità, de' quali l' uno sia nella semplice ragione di essa, e l' altro in quella del suo quadrato.

14. Girard ingegniere in capo di ponti e strade di Francia, fu il primo ad usare di questa legge, e che introdusse nel calcolo sotto la espressione analitica $a(v+v^2)$. Portando egli questa legge nella teoria delle acque correnti per canali , vene determinò la costante arbitraria a uso facendo delle duodeci esperienze lasciate da Chezy e Dubuat ; e legò così in una maniera immediata e diretta la dottrina di queste acque alla sana fisica. Girard sostituendo al movimento del fluido quello ipotetico di un sistema di corpuscoli solidi o punti materiali pesanti ; tenendo conto nell' analisi di un cosiffatto sistema della differenza, che passa tra la maniera di essere relativo de' suoi punti materiali e delle stille fluide ; e sottomettendo il caso alla legge delle resistenze , giunse a rappresentarne la velocità media delle acque in questione colla formola

$$v=\frac{1}{2}\left[-1+\sqrt{\frac{4gr\omega}{a\lambda}+1}\right]$$

formola molto più semplice di quella di Dubuat; formola che soddisfacendo con eguale approssimazione di essa a quelle esperienze, acquistò colla determinazione della costante *a* dal suo autore operata mercè delle medesime, un coefficiente numerico che il Prony dipoi estese a due, e col soccorso di un numero maggiore di fatti determinò con accuratezza.

15. Nel 1804 questo illustre successore di Chezy nella Direzione della scuola di ponti e strade; questo geometra sommo, quest' uomo dico sì benemerito pe' suoi travagli utili nelle scienze pratiche, pubblicò le sue *Ricerche sulle acque correnti.* In quest' opera insigne ha fatto egli delle ricerce e dato le conoscenze più positive di applicazione che noi abbiamo sul movimento delle acque. Per darne notizia nella direzione del nostro assunto, io rifletto che il movimento di un sistema di corpuscoli solidi o punti materiali pesanti per un canale curvilineo offre una serie di questioni che trova le sue analoghe in quello de' fluidi. Quest' analogia che ha fornito al Girard dice il Prony, il principale fondamento della sua teoria, è stata quella ond' egli ha appoggiato e fatto dipendere coteste sue ricerche. Supponendo il caso del movimento di un sistema siffatto; e sottomettendolo all' azione della gravità colle resistenze combinato, venne esaminandone i fenomeni che esso presenta. Intanto i corpuscoli componenti possono coesistere nel sistema come delle masse fra esse legate e formanti una specie di corde o catene flessibili, o come delle masse slegate e semplicemente in contatto.

Qualunque sia di questi due stati, il Prony esamina le forze che cagionano il movimento del siste-

ma , e ne deriva le equazioni fondamentali che lo rappresentano , e che alla soluzione conducono di tutte le questioni al medesimo relative : vi dà le equazioni della pressione e della velocità : quindi la tendenza alla discontinuità o la discontinuità reale che potrebbe darsi nel secondo caso ne considera: e diversi problemi di massimi e minimi che a' diversi fenomeni del movimento si rapportano ne risolve. Dopo di queste ricerche che il movimento riguardano del sistema nello stato solido, passa a considerarne quello sotto l' altro punto di vista dello stato fluido. Qui si dà primamente ad esaminarvi le proprietà caratteristiche che distinguono l' uno dall'altro caso ne' loro rapporti colla pressione e colla velocità. Riguardo alla prima egli osserva che essa si compone di due parti : l' una intrinseca proveniente dal proprio peso del corpuscolo o molecola, e dalla sua forza centrifuga ; e l' altra estrinseca risultante dalla differenza delle forze , onde le due parti di massa anteriore e posteriore del sistema si premono in opposizione sopra di esso nel senso della direttrice. Nel caso del sistema solido queste due pressioni sono indipendenti l' una dall' altra e l' estrinseca punto non influisce sull' intrinseca: in quello dello stato fluido la estrinseca si riproduce sull' intrinseca; con essa si combina; e se l' elemento si suppone assai picciolo, quest' ultima riuscendo insensibile è alla prima solamente che si riduce tutta la pressione normale alla direttrice. Riguardo poi alla velocità egli osserva che nel sistema fluido le portate di due sezioni diverse sono sempre le stesse; epperò dette v, v' le velocità medie di due sezioni s, s' farà in generale $v\,s = v's'$: que-

sta equazione non ha punto luogo nel caso del sistema solido nel quale tutti i punti della massa hanno per un istesso istante la medesima velocità, epperò le portate delle sezioni ineguali non possono essere eguali.

Questa maniera diversa di essere della pressione e della velocità deve farsi sentire nel fatto delle ricerche de' due sistemi. Quindi il Prony si fa a mostrarne le conseguenze che ne risultano. E con una analisi simile alla precedentemente seguita pel sistema solido, facendo astrazione delle resistenze, procede con introdurvi le due rimarcate proprietà distintive, e perviene alle equazioni della pressione e della velocità pel sistema fluido. Ravvicinando in seguito queste equazioni rispettivamente a quelle del sistema solido, ne rimarca le differenze: e dopo una ricapitolazione delle principali esperienze che possono servire allo stabilimento delle basi di una teoria fisico-matematica de' fluidi incomplessibili in movimento, viene a dare queste medesime equazioni tenendo conto di quelle resistenze; equazioni che significando con x, z le coordinate longitudinale e verticale dell' elemento, coordinate che nel fatto idraulico possono rappresentarne la distanza dall' origine del tronco e la caduta; con P, Π le pressioni significando per l' unità di superficie delle sezioni limiti del medesimo e supponendone regolare il procedimento, e perciò sensibilmente costante la sezione, ha egli porgiuto sotto l' espressione

$$\lambda p - g(\lambda z - \omega x) - (\lambda - x)\,P - \Pi\, x = 0$$

$$\lambda\left(\frac{dv}{dt}\right) + \lambda\left(\frac{\Phi v}{r}\right) - g\omega - (P - \Pi) = 0$$

Date queste equazioni che formano la conoscenza fondamentale della teoria, restava la determinazione della funzione Φv, introdotta indeterminatamente nel calcolo per la legge delle resistenze. Poggiando egli dunque su i fatti dal ragionamento guidati, viene a questa ricerca: e a tale oggetto prende in considerazione la seconda di queste equazioni, quella della velocità, che è quella che ne va dipendente. Quindi notando che le pressioni P, Π sono eguali nei casi ordinarj della idrometria, la riduce alla

$$d\left(\frac{dv}{dt}\right)+\lambda\left(\frac{\Phi v}{r}\right)-g\omega=0$$

e supponendo regolare il canale, e il movimento ridotto allo stato di uniformità e permanenza epperò $\left(\frac{dv}{dt}\right)=0$, riduce a questo caso l' equazione, che è quello (3), a cui ordinariamente si rapportano tutte le teorie, e la dà sotto la semplicissima espressione

$g r\omega=\lambda\Phi v$

espressione che abbraccia come casi particolari le equazioni di Chezy e di Girard, traducendosi nella prima assumendo per la legge delle resistenze con quello $\Phi v=av^2$, e nella seconda con questo $\Phi v=a(v+v^2)$.

Riflettendo egli in seguito che la funzione Φv può svilupparsi in una serie ordinata alle potenze ascendenti ed intere di v, senza venire ad alcuna ipotesi sulla sua composizione assume

$\Phi v=a+a'v+a''v^2+a'''v^3+$ ec., e ne ha l'equazione

$$\frac{g r\omega}{\lambda}=a+a'v+a''v^2+a'''v^3+\text{ec.}$$

E quindi conducendo sempre il ragionamento sul fatto, viene a rilevare che ne' casi delle pratiche

determinazioni il primo termine riesce insensibile, che gli altri dal terzo in poi sono trascurabili, e che può assumersi perciò come una posizione soddisfacente a' bisogni della pratica $\Phi v = a' v + a'' v^2$. Donde per la soluzione de' problemi idrometrici che le pratiche applicazioni riguardano, l'equazione $\frac{gr\omega}{\lambda} = a' v + a'' v^2$ èquazione che si conosce ordinariamente sotto il nome di *equazione di Prony*.

Per la piena conoscenza e l' uso di questa formola uopo è determinarsene i coefficienti a', a'' corrispondentemente al fatto della natura. Ma pria di interloquirne giova rimarcare che questa determinazione non si appoggia che ad esperienze eseguite in canali impediti da resistenze regolari soltanto e uniformi, e che la legge delle resistenze $\Phi v = a' v + a'' v^2$ non ha luogo perciò in generale per tutti i letti. In quelli impediti da resistenze irregolari e difformi come sarebbe se coverti per esempio da piante aquatiche o imbarazzati dice il Prony fino da battelli stazionati nel canale, le resistenze crescono come l' accidente del locale, e perciò quella legge abbisogna di una convenevole correzione onde non aberrare molto dal fatto. A questo proposito egli osserva che si previene questo inconveniente introducendovi una indeterminata α maggiore dell' unità come moltiplicatore del contorno bagnato β, onde determinarsi sotto l' ispezione del caso. Quest' idea dunque d' introdurre un coefficiente di correzione, dovuta per quanto egli crede al Girard, che nel suo rapporto sul canale dell' Ourcq l' ha preso $= 1,7$, porta ad assumere la sua equazione sotto la forma $\frac{gr\omega}{\alpha\lambda} = a' v + a'' v^2$.

Il punto di vista che immediatamente si presenta per la determinazione di a', a'' è quello di cercarne de' valori tali che soddisfacciano a delle esperienze fatte con accuratezza: moltiplicandosi il numero delle esperienze alle quali si faranno soddisfare, se ne avranno de' valori semprepiù vicini a rappresentare i fenomeni della natura. Il Prony sotto questo punto di vista camminando si fece per una prima determinazione a giovarsi delle dodici esperienze di cui si era servito il Girard per la determinazione della sua costante. Egli ha seguito un piano di applicazione, che si riduce in sostanza a quanto per la correzione delle anomalie che s' incontrano nei risultati di certe osservazioni, ha insegnato il Laplace nella sua Meccanica celeste all' occasione delle sue ricerche sull' ellitticità della terra. In effetto venne egli dapprima a proporsi come un problema generale che molti risultati dell' osservazione sono suscettibili ad essere legati fra di loro secondo una legge che previe alcune picciole correzioni, può rappresentarsi coll' equazione $Z=m+nX$; in cui X, Z significano due funzioni di una o più variabili, delle quali se ne ha un certo numero di valori dati dalla esperienza; e si tratta di dare ad m, n de' valori tali ond' essa rappresenti nella miglior maniera possibile i fenomeni del caso: a tal' uopo esibisce egli due metodi fondati sulla costruzione geometrica di quella equazione, e che condotti secondo le mentovate vedute del Laplace, portano ei dice ai medesimi risultati.

Dopo questo punto di vista generale scendendo ad applicarlo all' equazione in questione, viene a

metterla sotto la forma $\frac{gr\omega}{\lambda v}(=y)=a'+a''v$ simile alla generale enunciata: e dando successivamente a v i valori delle esperienze prese di mira, ne calcola in conseguenza i corrispondenti per y mercè l' equazione $y=\frac{gr\omega}{\lambda v}$, ove r, λ, ω sono dati da' rispettivi canali alle quali corrispondono; ne raccoglie un sistema di equazioni particolari fra le due determinande a', a''; e quindi per conseguirne la determinazione effettiva rimette ad alcuno de' tre insigni metodi puramente analitici nell' opera citata esposti (P. 1, lib. 3, art. 39; 40) del Laplace, ovvero a' due algebrico-geometrici citati da lui dati nell' introduzione delle sue Ricerche. I limiti di questo scritto non permettono che all' esposizione si venisse di questa applicazione: ci basta per l' istoria del processo di averne fatto un cenno.

Così operando il Prony sulle dodici esperienze di sopra notate, pervenne alla determinazione proposta de' valori di

$$a'=0,00093\,;\ a''=0,00266$$

e con essi a quella dell' equazione in discussione, che supposto il metro $=1$ ci si presenta sotto la espressione

$$0,00266\,v^2+0,00093\,v=\frac{gr\omega}{\lambda}$$

donde fatto $g=9,8088$ se ne ha

$$v=-0,174812+\sqrt{\left(0,0305592+3687,52.\frac{r\omega}{\lambda}\right)}$$

Questi risultati che forniscono per quanto egli stesso ne dice una buonissima regola usuale di calcolo

ad essere impiegata nelle idrauliche costruzioni, non servirono frattanto a contentarlo. Le dodici esperienze da cui veniva di tirarli, bastanti egli pensa a conseguire il suo primo fine, quello di comparare le tre formole di Dubuat di Girard e sua, non poteano riputarsi abbastanza soddisfacenti per la convenevole rappresentanza de' fenomeni. Quindi viene ad una seconda determinazione sopra un maggior numero di più accurate esperienze stabilendola.

In effetto a quest' uopo egli considera che quattro di quelle esperienze non meritano di aver parte nelle basi di una buona determinazione, perchè riconosciute fuori d' ogni dubbio per anomale; e le altre otto non davano molta fiducia, perchè la velocità di cui si abbisognava non vi era data immediatamente dal fatto, ma mediante il calcolo da una formola di Dubuat, formola empirica di cui terremo conto in appresso. Quindi egli si rivolta dalla banda di altre 23 esperienze, eseguite da quest' idraulico illustre colla maggiore esattezza. Ma queste esperienze non erano state fatte che in canali fattizj e di piccole dimensioni, epperò poteano lasciare de' dubbj, che potessero non essere applicabili a de' gran canali: dunque per la maggiore giustezza de' risultati, egli con certi riguardi quelle otto che il vantaggio godevano di appartenere a canali portanti delle sezioni molto più grandi e perciò più confacenti alla pratica pure vi combina; ne compone così il numero di 31; le sottomette al processo medesimo di sopra; e la determinazione ne tira de' valori di

$$a' = 0,000436 \,;\; a'' = 0,003034$$

Donde ne conchiude che per rappresentare nella maniera più approssimata di quello si era prima di allora operato egli dice i fenomeni del movimento in qualunque caso de' valori di r, λ, ω, e servire con più giustezza a' bisogni ed agli usi della pratica, potrà assumersi la formola

$$0{,}003034\,v^2+0{,}000436\,v=\frac{gr\omega}{\lambda}$$

ovvero supposto come sopra il metro $=1$ epperò $g=9{,}8088$

$$v=-0{,}0718523+\sqrt{\left(0{,}00516275+3232{,}96.\frac{r\omega}{\lambda}\right)}$$

oppure più semplicemente

$$v=-0{,}07+\sqrt{\left(0{,}005+3233.\frac{r\omega}{\lambda}\right)}$$

L'equazione della velocità $\lambda\left(\frac{dv}{dt}\right)+\lambda\left(\frac{\Phi r}{r}\right)-g\omega-(P-\Pi)=0$ alla quale il Prony è stato portato dalla sua teoria, e che ridotta all' uniformità di moto diviene $\lambda\left(\frac{\Phi v}{r}\right)-g\omega-(P-\Pi)=0$, come è applicabile a' canali scoverti così a' tubi di condotto. Il Prony dopo averne fatta l' applicazione al primo caso come si viene di vedere, passò ad applicarla al secondo. Qui le pressioni estreme P, Π che non sono eguali, possono sensibilmente trattarsi come costanti: inoltre l' esperienza ci mostra che il movimento si riduce prontamente all' uniformità: ed infine che la caduta ω equivale alla differenza di livello tra i due orificj del tubo; e che notate con h, h' l' altezza rispettiva del-

l' acqua premente sopra di essi, si ha $P = gh, \Pi = gh'$. Quindi facendo con lui D eguale al diametro del tubo, epperò $r = \frac{1}{4} D$; ed $J = \frac{\omega + h - h'}{\lambda}$ ($= \cos \varphi$; φ essendo il complemento dell' angolo che misura la differenza di livello tra la superficie dell' acqua nel recipiente superiore e quella nel bacino inferiore); e sostituendo ne ottenne l' equazione $\frac{1}{4} g\, DJ = a' v + a'' v^2$; equazione che sottomessa al metodo stesso del caso precedente ed appoggiata alle 51 esperienze fatte in condotti che variavano

nel diametro da $0^m,03$ fino a $0^m,5$

nella lunghezza da 3^m o 4^m fino a 2300^m

lo portò alla determinazione de' valori di

$$a' = 0,00017;\ a'' = 0,00342$$

e con essi all' equazione

$$\frac{1}{4} g\, DJ = 0,00017\, v + 0,00342\, v^2$$

che dà

$$v = -0,24885 + \sqrt{(0,0006192 + 717,86 . DJ)}$$

Qui non è fuori proposito il rimarcare la conformità de' risultati a cui queste due formole conducono; conformità che il Dupin (Mecc. d' arti e mestieri Fir. 1829) ci mette sottocchio come una cosa degna di attenzione.

Il Prony finalmente assegna cammin facendo una formola empirica simile a quella di Dubuat fra la velocità media e la superficiale, la preferenza ne ri-

marca, il paragone nel fatto ne sostiene; e si fa a comparare fra di loro le date due formole pe' canali ed i tubi: quivi osservando egli ne' risultati rispettivi una tendenza all' identità come le esperienze onde pendevano divenivano più numerose ed esatte, concepì l' idea di rappresentarne l' uno e l' altro caso con una sola e medesima formola; idea che sostenuta e condotta con delle considerazioni di fatto lo condusse a conchiuderne che supposto

$G = \frac{r\omega}{\lambda}$ ovv. $= \frac{1}{4} DJ$, può assumersi con tutta la esattezza necessaria alla pratica per questa formola

$$0{,}00030298 . v + 0{,}00322502 . v^2 = g\,G; \text{ ovvero}$$

$$v = - 0{,}0469734 + \sqrt{(0{,}0022065 + 3041{,}47 . G)}$$

Dopo questo ravvicinamento e la conchiusione di questa formola, di cui si mostra di non intenderne proporre l' uso ne' calcoli di applicazione, mette termine al suo lavoro colla soluzione di alcuni problemi di pratica relativi a' tubi ed a' canali a pendio costante e variabile.

Questo egregio lavoro di cui mi son fatto a darne di fuga questa specie di sunto ragionato, onde farne sentire l' importanza delle ricerche a nostro riguardo e raccomandarne la lettura, nonostante la sua pregevolezza per la sublime ed ingegnosa analisi con cui vi si conduce la parte fisico-matematica, e la sua utilità per la moltiplice varietà di applicazioni di fatto che contiene in pro della pratica, non lascia di presentare un tessuto tortuoso e complicato

per quello che riguarda il suo oggetto principale, la teoria delle acque in movimento. Quella specie di teoria preparatoria del movimento di un sistema di corpuscoli solidi o punti materiali pesanti, condotta sempre a fianco e ad essa comparativamente, utile al suo autore in conseguire il fine accessorio e secondario che egli se ne avea proposto, sembrami che gli faccia perdere di quella semplicità e precisione di cui può esser capace. Quindi senza arrestarmi a qualunque altra teorica di non marcata utilità, mi avanzo a parlare dell' elegante teoria analitica del movimento lineare dal Venturoli discussa, e da lui applicata a tutti i casi del movimento delle acque ne' suoi citati *Elementi*, ed a camminare il breve sentiero che con facilità e direttamente conduce all'equazione istessa di Prony; equazione che dopo l' ultima rettificazione e perfezionamento ricevuto per mano di Eytelwein forma il più gran passo che si è dato nell' idrometria teoretica.

16. La teoria di cui vado a parlare non si riduce in sostanza (12) che alla traduzione algebrica delle idee (num. cit.) richiamate dal Cav. Bonati. Infatti l' idea fondamentale della nuova teoria da questo illustre idrometra proposta, non consiste che in supporre che il numero delle particelle elementari comprese in una medesima sezione fosse per tutte lo stesso; che è quanto dire, la massa fluida che passa per una sezione qualunque normale all' asse del movimento è costante ed inalterabile; epperò non va stabilita che sul principio dell' inalterabilità della massa, principio che il Tadini ha preso ed adottato nella sua teoria analitica del movimento generale dei

fluidi, principio dico che porta a prendere come costante la portata istantanea di ciascuna sezione. Quindi dicendo s, f le ampiezze di due sezioni qualunque; v, c le velocità corrispondenti, se ne avranno vs, cf per le portate; epperò in conseguenza di cotesto principio l' equazione fondamentale

$$vs = cf: \text{ donde } v = \frac{cf}{s}$$

equazione che il Venturoli deduce dal principio della continuità, e dice perciò con questo nome.

Una seconda idea fondamentale che riguarda le forze produttive il movimento concorre colla prima a formare la teoria del Bonati: quest' idea ridotta in frasi algebriche porge la seconda equazione fondamentale, che il Venturoli dice *delle forze sollecitanti*. Infatti si richiami al proposito che la forza intrinseca che anima secondo questa teoria ciascuna particella fluida, è proporzionale al seno dell' angolo d' inclinazione della linea di moto all' orizzonte. Quindi detto φ l' angolo che questa linea fa colla verticale, ed l la distanza della particella dall' origine del movimento lungo la direttrice sarà
$gsdl$ il peso della portata istantanea della sezione
$gsdl \cos\varphi$ la parte di esso agente in accelerarla.
Inoltre la forza estrinseca è proporzionale al seno dell' angolo d' inclinazione della superficie del fluido all' orizzonte, seno che è esso stesso(12) proporzionale alla differenza delle pressioni di due particelle contigue: onde detta
p la pressione pella sezione contermine anteriore,

e supposto in generale discendente il movimento ne sarà
$-dp$ quella differenza, epperò
$-gsdp$ la forza estrinseca in discorso.

La forza motrice dunque che produce la portata istantanea di una sezione sarà $=gs(dl\cos\varphi-dp)$ epperò dividendo per la massa sdl
ne sarà l' acceleratrice$=\frac{gs(dl\cos\varphi-dp)}{sdl}$
la quale altronde sappiamo essere$=\frac{dv}{dt}$
quindi sarà

$$gdp=dl\left(g\cos\varphi-\frac{dv}{dt}\right)$$

E chiamando x, z le coordinate orizzontale e verticale della molecola si avrà

$$dl\cos\varphi=dz$$

Risultato che per essere $\frac{dl}{dt}=v$ darà

$$gdp=gdz-vdv$$

Ma qui bisogna rimarcare che nella ricerca di questa equazione non si è contato che sulla sola coordinata z della molecola senza punto legarvi la dipendenza del tempo t da cui in generale puranche dipende: quindi nell'integrarla non bisogna trattarvi che z come variabile, prendendovi t come costante.

Le due equazioni trovate e che si sono ricercate ad oggetto di presentare un punto di ravvicinamento tra la teoria prodotta come nuova dal Bonati, e quella del movimento lineare discussa dal Venturoli, sono le due equazioni fondamentali onde questo

ultimo stabilisce la dottrina delle acque correnti in tutti i casi. Eliminando dalla seconda la velocità v mercè della prima, esse si ridurranno alle due

$$v=\frac{cf}{s},\ gp=gz-f\frac{dc}{dt}\int\frac{vdt}{s}-\frac{c^2 f^2}{2gs^2}+C$$

ove p significa la pressione che agisce sul senso della direttrice, e tende ad accelerare il movimento; e C, c due funzioni arbitrarie del tempo da determinarsi sotto le condizioni speciali esibite a tale oggetto dal caso in quistione.

17. I fenomeni delle acque che si movono per vasi e tubi di ogni sorta e per alvei, appartengono a questo genere di movimento. E il saggio Direttore della suola pontificia di acque e strade applicando queste due equazioni a' diversi oggetti sì dell' uno che dell' altro caso, ne dà la spiegazione con tutta quella approssimazione che sperar si può da ricerche cotanto indocili al dominio rigoroso del calcolo , e le leggi ne determina. Senza fermarci sul primo caso, perchè estraneo al presente assunto , mi arresto un momento sul secondo, onde conchiudere sul proposito, quello dico di procedere direttamente alla ricerca dell' equazione di Prony determinante la velocità. Richiamando dunque a questo fine la nota proposizione che stabilisce nel movimento in stato di permanenza la pressione costante in tutte le sezioni, epperò $gdp=0$; richiamando inoltre che

$$dz=dl\cos\varphi$$

si avrà sostituendo , l' equazione delle forze sollecitanti sotto l' espressione

$$g dl \cos\varphi - v\, dv = 0$$

Questa equazione suppone il movimento sgombro da qualunque impedimento, e perciò non è che meramente matematica. Quindi per renderla allo stato della realità fisica vi si dee tener conto della forza ritardatrice delle resistenze; resistenze dico però uniformi, perchè esse sole possono sottomettersi al calcolo in generale, non potendo le locali venirvi in considerazione che coll' ispezione dello stesso caso particolare. Significando dunque con R la somma di coteste resistenze, e supponendole date in peso, ne sarà — $gRdl$ l' effetto istantaneo, epperò l' equazione che rappresenta il movimento in questo caso sarà

$$g\, dl \cos\varphi - v\, dv - gR\, dl = 0$$

equazione che pe' tratti di corso equabile, ne' quali l'acqua scorre mantenendo sezione e velocità costante diviene

$$R - \cos\varphi = 0$$

ovvero adottando la legge di Prony (15), e riflettendo che nel movimento per tubi e canali la resistenza è reciprocamente proporzionale al raggio medio r, epperò $gR = \frac{\Phi v}{r}$, cioè $R = \frac{a' v + a'' v^2}{gr}$
si avrà l' equazione in discorso sotto la frase

$$a' v + a'' v^2 - gr \cos\varphi = a' v + a'' v^2 - \frac{gr\omega}{\lambda} = 0$$

che è quella da lui data (15)
Si sa come questo geometra di oltremonte è arrivato alla determinazione delle costanti arbitrarie a', a'': ma il Venturoli ha amato meglio ripeterla altrimenti.

In effetto ha egli riflettuto che la causa delle resistenze uniformi delle acque che scorrono per tubi e per canali aperti non proviene che dall'attrito e dalla imperfetta fluidità ; e perciò non essendo che della stessa natura non avvi ragione in credere che nei primi agiscano di un modo e ne' secondi di un altro. Quindi fintanto che l' esperienza non dimostri il contrario ragion vuole egli dice, di aversi come per cosa stabilita che tanto negli uni quanto negli altri debbano seguire le medesime leggi , ed esprimersi colle medesime formole. Medesimando egli dunque il caso de' canali a quello de' lunghi tubi; e da parte mettendo tutte le altre ipotesi, si é attenuto come la più verosimile a quella adottata dal Prony nelle sue citate ricerche; ipotesi che notando con α, β due costanti indeterminate ha scritto (Elem. cit. 257) sotto la frase

$$R = \frac{3\alpha}{2r} \cdot \frac{v^2}{2g} + \frac{3\beta}{2r} v$$

Con questo punto di vista l'equaztone $R - \cos\varphi = 0$ diviene fra le sue mani

$$3(\alpha^2 v^2 + 2g\beta v) - 4gr \cos\varphi = 0$$

Quantunque ei opinasse che i valori α, β dovessero essere per questo caso quelli stessi assegnati pe' lunghi tubi, frattanto prima di usarne volle sottometterli alla prova dell' esperimento. Quindi sostituendo nell' equazione i valori di $\alpha = 0,003$; $\beta = 0,00004$ a quel caso corrispondenti ; e riducendola così all' espressione

$$3(0,003\, v^2 + 2g .\ 0,00004\, v) - 4gr \cos\varphi = 0$$

la portò sotto il fatto delle due serie di esperienze

di Bossut e Dubuat, le sole eseguite in alvei di corso equabile ed all' uopo di comoda applicazione: e lungi d' incontrarvi delle notabili anomalie non vi sperimentò che un' assai lodevole corrispondenza di risultati; corrispondenza che secondo lui riuscir dovrà ancor più marcata , quando adotterassi per la legge delle resistenze la formola

$$R = \frac{3.0{,}00086}{2r^{1,27}} \cdot \frac{v^2}{2g} + \frac{3.0{,}0004}{2r^{0,5}} v$$

da lui proposta invece della precedente. Intanto le esperienze prese per prova non essendo che relative a' piccioli corsi d'acqua, potrebbero a giusta ragione dar luogo a dubbio che la corrispondenza della formola potesse non verificarsi con delle altre esperienze eseguite in gran canali e ne' fiumi. Onde il Venturoli rimettendone la decisione a delle prove ulteriori con maggior accuratezza operate, e in correnti varie e diverse, si è attenuto per la risoluzione dei problemi idrometrici sopra fiumi e canali di corso equabile alla formola presa sotto l' anzidetta espressione, che risoluta per v dá

$$v = -0{,}13 + \sqrt{0{,}17 + 4360\, r \cos \varphi}$$

sentendo di non potersi per allora definire se co' coefficienti dal Prony calcolati preferibile riuscisse e di maggior fiducia nelle applicazioni principalmente a delle correnti naturali.

18. La formola di Prony di cui è parola ha ricevuto in seguito un nuovo grado di perfezionamento che il Venturoli punto non menziona nella edizione terza (1818) de' suoi *Elementi*. Questa for-

mola comparve nei volumi per gli anni 1814 e 1815 dell' Accademia reale di Berlino con coefficienti novellamente calcolati dal geometra alemanno Eytelwein. Io non conosco originalmente e in fonte il lavoro di questo geometra distinto lavoro già tradotto e pubblicato fin del 1826 nel tomo 12 degli *Annales des Mines*. Solo ne so (Ricerche geom. e idrom. della citata scuola 1821) che egli raccogliendo un numero di 60 esperienze eseguite in grande sul Reno di Germania sul Veser e sopra varj canali di scolo dagli idrometri tedeschi Brunings, Funk e Woltmann, ed unendole alle 31 usate dal Prony, ne formò un fondo in tutto di 91 appartenenti a correnti diversissime ed in una gran varietà di accidenti, a correnti dico di cui

le sezioni ( )fra i limiti $0^{mq},015$ a 2600^{mq}
le pendenze (variavano)fra i limiti $0^{m},0005$ a $0^{m},01$
le velocità medie( )fra i limiti $0^{m},12$ a $2^{m},4$

e quindi col sistema di questo copioso numero di fatti egli intraprese la rettificazione della formola, e per le costanti a', a'' trovò

$$a' = 0,0002380122, \quad a'' = 0,0035855526$$

epperò la legge delle risistenze divenne

$$\Phi v = 0,0002380122\, v + 0,0035855526\, v^2$$

Donde l' equazione del Prony sotto l' espressione

$$\frac{g\omega r}{\lambda} = 0,0002380122\, v + 0,0035855526\, v^2$$

che risoluta per v dà

$$v = -0{,}0319 + \sqrt{(0{,}0011016 + 278{,}899 . rg \cos\varphi)}$$

ovvero essendo il metro = 1 epperò $g = 9{,}8088^{m}$

$$\frac{a'}{g} = 0{,}0000242651 ,\ \frac{a''}{g} = 0{,}000365543$$

si avrà la più semplice espressione

$$\frac{r\omega}{\lambda} = 0{,}0000243\, v + 0{,}0003655\, v^2$$

che dà

$$v = -0{,}0319 + \sqrt{(0{,}0011 + 2735,\ 656\, r \cos\varphi)}$$

Trovata la velocitá media resta per la soluzione completa del problema derivarne la portata. Sia a tale oggetto detta P: e sia S la sezione dell' alveo in questione: ed avremo

$$(1)\quad P = Sv = S(-0{,}0319 + \sqrt{0{,}0011 + 2735,\ 656 . r\cos\varphi})$$

Il primo termine sotto il radicale potrà trascurarsi come assai piccolo, ed aversene per una sufficiente approssimazione

$$(2)\quad P = S(-0{,}0332 + \sqrt{2736\, r \cos\varphi})$$

Quando la velocità è assai grande la legge delle resistenze

$$\Phi\, v = 0{,}00358\, (0{,}067\, v + v^2)$$

per esservi in tale caso il primo termine assai picciolo in confronto del secondo epperò trascurabile, diviene

$\Phi v = 0{,}00358 v^2$; cioè proporzionale al quadrato della velocità

In questo caso potremo sensibilmente assumere

$$gr \cos\varphi \; (= \Phi v) = 0{,}00358\, v^2$$

epperò

$$v = 52 \sqrt{r \cos\varphi} : \text{donde (3) } P = 52\, S \sqrt{r \cos\varphi} = 52\, S \sqrt{\frac{r\omega}{l.}}$$

Per sentire il diverso grado dell' approssimazione a cui coteste formole conducono, non mi sembra fuori proposito il portarle sul fatto di qualche applicazione: e mi sia permesso perciò di soggiungere brevemente il seguente rimarco.

Le formole di cui si parla non suppongono il movimento per l' alveo che in istato di corso equabile e permanente. In questo stato da sezioni ineguali non dovranno aversi nel tempo stesso che portate eguali; altrimenti l' acqua si gonfierebbe continuamente e si abbasserebbe, e perciò non sarebbe nel supposto stato di permanenza. In siffatto stato dunque per averne la portata basta riconoscerla per una sola sezione. Intanto negli alvei naturali che sono i più comuni, s' incontrano ordinariamente molte irregolarità tali che questo stato di rado vi esiste o poco vi dura. Quindi nell' applicarle a questo caso che è quello de' fiumi, uopo è fissarsi ad una sezione libera e viva, ad una sezione dico sì regolare e ristretta che tutta l' acqua siavi in moto, e sì lontana da svolte, da rigurgiti e da tutti quegli altri accidenti che render velo potrebbero sensibilmente alterato. Non è così nel caso degli alvei arteficiali che è quello de' canali, e che generalmente presentano declivio e sezione regolare

e costante: la velocità diviene in essi prontamente uniforme, il volume d'acqua scorrente costante, e lo stato di permanenza durevole. Nelle applicazioni dunque al primo caso ci abbisogna la scelta di un tronco assai regolare che un declivio assai uniforme presenti, che da tortuosità sia sgombro e ringorghi, da corrosioni libero e confluenze, da correnti notabili dalle rive al filone, da rotte, da aperture d'argini, da altre simili cause onde il moto ne verrebbe sensibilmente disturbato: in tronchi siffatti abbisogna dico sopra una lunghezza assai considerabile, di tese 500 almeno, prendere il profilo di più sezioni, il medio ragguagliarne, il declivio assoluto con accuratezza raccoglierne, onde poterne sperare de' risultati al caso de' canali comparabili.

Per quanto approssimativo voglia questo processo riputarsi, quando potrà essere impiegato riuscirà sempre alle misure dirette superiore; superiorità che va però sempre più perdendo come la riunione di cosiffatte circostanze va più mancando. Le applicazioni dunque riuscendo più semplici e di minore difficoltà ne' canali artificiali che ne' letti de' fiumi, noi prenderemo di mira il primo caso, e ci proponiamo una delle operazioni idrauliche più grandi e memorabili che siasi mai eseguita ne' tempi nostri, del canale dico dell' Ourcq, a fornire principalmente diretto di abbondante acqua i quartieri tutti di Parigi. Questo magnifico travaglio che costa alla Francia dappresso a cinquanta milioni, non consiste che in un canale navigabile portante le acque del fiume Ourcq pel corso di 5104 tese in un bacino stabilito sul territorio della Villette; bacino in cui il livello delle

acque vi si mantiene ad 86 piedi più alto da quello delle basse acque della Senna;da cui 80000^{mc} di acqua via di un condotto di fabbrica lungo 2316 tese che scorre mantenendosi al medesimo suo livello, sono portate in 24^{or} dopo aver contornato la parte settentrionale di Parigi sino alla piana di Mouceaux, e da cui sono alimentati inoltre due navigli che vanno infine ad immettere nella Senna, l'uno traversando il sobborgo del Tempio, e l'altro la piana Saint-Denis sino all'entrata della città.

Venendo all'applicazione di un caso cotanto marcato, io impresto le date in metri di cui abbisogno dal calcolo della caduta che M. D'Aubuisson ne ha prodotto. Intanto i letti de' canali possono essere scavati nel sasso o rivestiti di muratura, e possono essere nelle terre scavati. Il fine di ottenervi il massimo effetto, la massima portata dico, ha fatto pensare di riunire nella sezione la massima area al minimo contorno bagnato; circostanza che per essere il cerchio quello fra gl'isoperimetri che abbraccia la maggior superficie, porterebbe in generale a darvi la figura circolare: ma la difficoltà che vi si andrebbe ad incontrare nella costruzione e la spesa ne hanno fatto invece adottare nel primo caso la rettangola, ed essa per averne il massimo prodotto condizionata ad una base pari a due altezze; nel mentre che nel secondo caso a cui l'economia sempre invita, ne ha fatto scegliere a riguardo della stabilitá la trapeziale ad argini inclinati all'orizzonte di 34° al più, e condizionata onde il medesimo fine conseguirvi del massimo effetto, ad un'altezza metà della larghezza media. Non è che in questo secondo caso il letto del

canale in questione. M. Girard geometra sommo e distinto ingegniere incaricato dell' opera, portato dalle circostanze del caso proposto si è fatto a dare alla

base inferiore del trapezio . . .	$3^m,50$
inclinazione degli argini	$33° 42'$
pendio di essi	$2^m,25$
lunghezza di essi	$2^m,70$
base superiore	$8^m,00$
altezza	$1^m,50$
epperò l' area	$8^{mq},625$
il contorno bagnato	$8^m,90$
il raggio medio	$0^m,96$

Riguardo al declivio o caduta il Girard ha riflettuto che le piante aquatiche che nascono nel fondo e sugli argini de' canali, aumentano notabilmente il contorno bagnato e la resistenza; e la portata perciò ne diminuiscono. Quindi per compensare questa diminuzione ha pensato che bisognava aumentare il declivio dal calcolo additato, per averne la giusta voluta. Onde essendo quello dato dal calcolo $0^m,0000 5502$, ha giudicato portarlo nel fatto pratico a pressochè il doppio e farlo di $0^m,0001056$. Ma il nostro caso non è che quello del calcolo: e le formole dell' applicazione proposta non suppongono che le sole resistenze generali, le regolari e uniformi; e punto non tengono conto dell' impedimento rimarcato, che è meramente particolare al caso in cui l' opera è. Quindi per noi la caduta sarà quella che il calcolo ha dato al Girard, e che quello di D' Aubuisson ha dirò così sanzionato; sarà dico

$$\cos\varphi\left(=\frac{\omega}{\lambda}\right)=\cos 89° 59' 49''; \text{ ed } r\cos\varphi = 0^m,0000528$$

Quindi sostituendo questi valori nelle formole di cui si tratta, ne avremo per l'approssimazione di quella della marca (1) $\cdots P(=Sv=S\cdot 0{,}3483)=3^{m}{,}004$

della marca (2) $\cdots P(=Sv=S\cdot 0{,}3469)=2^{m}{,}992$

della marca (3) $\cdots P(=Sv=S\cdot 0{,}3775)=3^{m}{,}256$

Le prime due non danno la portata che con una differenza appena montante a dodici millimetri, nel mentre che la terza ne aberra da circa un quarto. Ma quest' ultima non è che pei casi delle grandi velocità; e perciò le due prime possono usarsi a piacere l'una per l'altra in tutti i casi, e non è così l'ultima che non può bene addirsi al caso nostro, che a quei delle gran velocità non appartiene.

La portata dunque del canale in questione dalla formola di Eytelwein definita non ammonta che a 3 metri cubi circa; portata che procedente ed immessa con una velocita $0^{m},35$ a secondo nel bacino della Villette va quindi a recarsi pel fine proposto a Parigi ; e che corrispondente alla quantità effettiva di acqua che era in mano percosiddire del Girard a potersi dispensare , ha dovuto onde nel fatto pratico verificarsi assoggettarvi il declivio ad un aumento come qui sopra rimarcossi.

19. Intanto il Venturoli che ricusato avea (num. prec.) l' adozione della formola di Prony sotto la forma da lui immediatamente data, venne in seguito dice il *Cavaliere* nella sua Architettura statica (Firenze 1833), ad illustrarla egli pure sotto l' espressione da Eytelwein prodotta. Infatti la scuola idraulica che egli

reggea da Direttore in capo, nel volume stesso delle sue Ricerche testè citate, venne pubblicando una tavola che supposte date le sezioni e la caduta, porge il valore del fattore $r\cos\varphi$ da cui dipende, e quello ne esibisce in corrispondenza della velocità media cercata da $0^m,01$ sino a 3^m, al grado dell' approsimazione di quest' ultima espressione. Questa tavola simile a quella che il Prony ha dato al grado di approssimazione della sua formola, e il Venturoli stesso al grado di approsimazione della sua, onde l' uso facilitarsene, e le verificazioni agevolarsene con nuove variate e moltiplicate prove, e quindi più a fondo riconoscersi la legge delle acque che scorrono per ampj letti; questa tavola dico è preceduta da un' altra del pari calcolata allo stesso fine da quella scuola, la quale presenta un' utilità forse ancora maggiore: infatti si trovano in essa registrati in confronto i risultati della formola in discorso non solo con quelli delle 91 esperienze sopradette ma di altre ancora eseguite nel 1811 dal Cav. Bonati colle sue aste ritrometriche sul Po dappresso a Lagoscuro in acqua magra media e piena; di altre tre da Giorgio Bidone eseguite nel 1819 sui canaletti dello stabilimento idraulico dell' Università di Torino e nel 25mo volume pubblicate dell' Accademia reale di quella capitale; e di altre due finalmente dalla stessa scuola condotte, l' una nel 1820 a Fossa d' albero sul Po vicino a Ferrara, e l' altra nel 1821 sul Tevere nelle vicinanze di Roma: con questo confronto di un tanto prodigioso numero di verificazioni la formola stabilita si trova maggiormente nel fatto. Questi travagli che per la loro utilità danno all' illustre Corpo che l' ha eseguiti ed al capo

che lo dirigea un titolo di onore, ha impresso nella formola un carattere di gran fiducia e confidenza; e sono stati da un altro simile ed ancor più grande ed esteso seguiti.

Il Prony venuto nuovamente nel 1825 sopra di questo argomento, riferisce il Dupin nell' opera citata, ha tirato fuori dal torchio della reale stamparia di Parigi una memoria in quarto sotto il titolo di *Raccolta di cinque tavole*. Queste tavole dirette a facilitare e abbreviare il calcolo non solo della formola che ha per oggetto il movimento delle acque per canali scoverti ma ancora di quella del loro movimento per condotti, presentano l' insieme de' risultati di 167 esperienze impiegate a verificarle e stabilirle: e mentre mirano a fissare una relazione tra l' uno e l' altro movimento, danno ancor più alla formola di Eytelwein che è il nostro particolare oggetto, un' eminente sicurezza nel fatto delle applicazioni, una somma confidenza nei risultati.

20. La formola di Prony possiamo dunque conchiudere che colle nuove correzioni di Eytelwein forma il più gran passo che si è dato finora della soluzione fisico-matematica del problema sul movimento delle acque correnti per gli alvei, ha acquistato un alto grado di perfezionamento. Con un tanto apparato di verificazioni e di prove è essa divenuta nella pratica di tutta fiducia per una stretta e soddisfacente approssimazione, in quei casi principalmente ove la velocità non eccede i tre metri a secondo, cui monta nelle piene ordinarie: la sua utilità nei rapporti delle portate coi bisogni delle arti è marcata

e decisa, nelle alte piene specialmente ove l'uso degli strumenti idrometrici deve per l'ordinario riuscire impraticabile e sempre incerto: e la scienza dei fiumi ha in essa il più stabile appoggio, la sua maggiore risorsa, il suo più semplice e sicuro strumento.

Tali sono per quanto io sappia sino a quest'ultimi tempi i più utili progressi della soluzione *a priori* del problema proposto. Venghiamo ora a vederne quelli della soluzione *a posteriori*, oggetto della seconda parte.

SECONDA PARTE

METODI PRATICO-SPERIMENTALI SULLA RICERCA DELLA VELOCITA' DELLE ACQUE CORRENTI PER GLI ALVEI.



21. Gl'idraulici camminando nella ricerca della velocità delle acque correnti per la via delle pure teorie, presto dovettero accorgersi che esse riuscire doveano di tarda e insufficiente riuscita nella soluzione del problema. Quindi da cosiffatto cammino deviando dovettero presto rivolgersi a contemplare e a consultar la natura, a rivolgersi dico a delle teorie sopra i fatti fondate, a dei metodi pratici e sperimentali, solo usando del ragionamento e del calcolo *a posteriori* in loro ajuto e sostegno. Per quest' altra via dunque camminar si dovea sempre osservando, sempre sperimentando ed uso sempre facendo di strumenti, dai quali l' esperienza in generale dipende e giammai si scompagna. Nella prima parte noi abbiamo battuta la strada delle teorie sull' esperienza basate: noi andremo in questa seconda quella altra a percorrerne che gli strumenti e i metodi sperimentali riguarda; che a compire conduce la soluzione del proposto problema.

22. Dal momento che l' Abb. Castelli fece conoscere il bisogno della velocità nel calcolo delle portate, quello di un istrumento dovette principalmente sentirsi per misurarla. I galleggianti dovettero essere i primi a presentarsi agli occhi degl' idrometri: e fra essi il così detto galleggiante semplice, che ne è

il più facile ad idearsi e a concepirsi; a potersi allo uopo applicare. In effetto fu esso il primo che presentossi all' idea dell' istesso Castelli e che da lui si propose nell' Appendice undecima della sua citata *Misura delle acque correnti*. La costruzione di questo strumento è sì nota che non merita special menzione, non riducendosi che ad una palla, ad un parallelopipedo, o finanche ad un cubo di una gravità specifica minore dell' acqua. Il suo uso che si riduce a metterlo in acqua e a misurarne via di un cronometro la durata del viaggio, non è però punto generale: esso non ha propriamente luogo che nelle correnti di moto equabile e pressochè orizzontali; nelle correnti in cui il movimento libero si trova e sgombro da impedimenti; in quelle principalmente dico ove si tratta di velocità superficiali e del filone, al quale il suo moto con quello delle acque combinato prestamente lo riduce. Quindi è che il chiarissimo abb. Bossut solito a valersene nelle sue esperienze, si vedea spesso costretto dalle circostanze a sostituirvene un altro più convenevole; usando in tal caso per quanto egli ne dice con lodevol successo, di una leggierissima ruota di diciotto in venti pollici di diametro esteriore, portante 15 in 18 palmette di latta, e libera moventesi sopra un asse assai levigato e sottile; ruota che il Michelotti ci ha descritto il primo nel 1767; che il Dubuat ha in seguito classificato sotto il nome di *molinetto;* dall' uno e l' altro usata sotto diverse dimenzioni; e che fra le machinette idrometriche fisse, non vi sarebbe forse di meglio per le misure superficiali, se l' apparato meccanico onde renderla al fatto, inevitabili non ne

rendesser le alterazioni dell' operazione, che nelle piccole correnti i risultati ne sfigurano, e l' uso impraticabile ne rendono dirò così ne' grandi fiumi.

23. L' uso limitato di questo galleggiante dovette all' incominciarsi a dubitare di essere la velocità nella sezione variabile e non costante, far tosto sentire il bisogno di altre risorse onde misurarne gli effetti la gradazione e la legge. Infatti il P. Cabeo della compagnia di Gesù prese immantinente a correggerlo nella direzione di questo fine, e lo propose sotto la costruzione di un' asta di legno, onde potesse sentire così tutte le impressioni della corrente secondo l' altezza; costruzione che modificò in appresso il Baratteri; quindi pure il Lecchi, di cui il Mann ne ripeté in Londra quali sue proprie le idee; e finalmente il Bonati perfezionò come vedremo a suo luogo.

Mentre così si procedeva in Italia alla ricerca delle velocità inferiori, Mariotte in Francia con altre vedute camminava al medesimo fine. Questo illustre idraulico pensò di accoppiare una seconda palla all' istrumento, e ridurlo ad un sistema di due unite insieme mercè di un filo flessibile, l' una specificamente più leggiera e l' altra più pesante dell' acqua; tanto che sommerso la prima galleggiasse in superficie, e la seconda si profondasse per tutta la lunghezza del filo. Quest' idea da lui non portata al fatto che in piccole correnti e restata interamente sterile per un secolo e più, produsse dalle mani del Cav. Brunacci un nuovo strumento conosciuto sotto il nome di *Galleggiante composto:* noi ne andiamo a riandare brevemente la teoria e l' uso, che ci ne

diede in un' egregia memoria fra quelle dell' Istituto italiano per l' anno 1806.

Posto in acqua questo galleggiante vedrassi ben presto navigarvi con moto equabile e progressivo. Quindi significando con v, v', v'' le tre velocità, dello strumento osservata, superficiale della corrente via di un galleggiante semplice sperimentata, e cercata dello strato della palla inferiore; significando con

a, a' i diametri delle due palle, che in particolare mentre ne' piccoli canali basta lo assumerle di appresso a $0^m,04$, nel Po ove le sezioni sono ampie fino a 500 metri, si sono dovuti usare per sino a $0^m,35$

p, p' le loro gravità specifiche, supposta $= 1$ quella dell' acqua

β un' indeterminata

si avrà 1° la forza acceleratrice della palla superiore $= \beta a^2 (v'-v)^2$ quella ritardatrice della palla inferiore $= \beta a'^2 (v-v'')^2$, epperò per esserne equabile il movimento l' equazione di condizione $\beta(a^2(v'-v)^2 - a'^2(v-v'')^2) = 0$; donde $v'' = \frac{(a+a')v - av'}{a'}$; equazione che nel caso più semplice di cui il Brunacci stesso in enunciarne l' uso ha fatto menzione, quello dico in cui le palle sono di eguale diametro, diviene $v'' = 2v - v'$

si avrà 2° il peso della palla superiore $= \frac{4a^3\pi p}{3}$, quello dell' inferiore $= \frac{4a'^3\pi p'}{3}$; epperò quello dell' intero strumento $= \frac{4\pi}{3}(a^3 p + a'^3 p')$: donde il suo peso specifico $= \frac{a^3 p + a'^3 p'}{a^3 + a'^3}$:

e quindi affinchè navigasse sommerso a fior d' acqua che è il modo più convenevole d' usarlo, l'equazione di condizione $\frac{a^3 p + a'^3 p'}{a^3 + a'^3} = 1$, che nel caso delle palle eguali diviene $\frac{1}{2}(p + p') = 1$:

si avrà 3° finalmente dalla prima di queste due equazioni il rapporto convenevole tra le gravità specifiche delle palle rispetto a quella dell' acqua; e dalla seconda con accorciare ed allungare il filo, che ne lega il sistema, la velocità della corrente alle diverse sue profondità; e perciò la gradazione, cioè la scala delle velocità per altezza.

Da cosiffatte idee facilmente si raccoglie che questo strumento poco lascerebbe a desiderare se potrebbe conoscersi precisamente la profondità dell'immersione della palla inferiore, epperò dello strato in osservazione. Ma il filo sommerso non si mantiene rettilineo, e vi concepisce una curvatura che varia come diversa ne è l' indole della corrente. Quindi è che la profondità dello strato non risulta come si suppone dal prodotto della lunghezza del filo pel coseno dell' angolo di sua deviazione dalla verticale, ma dipende dalla curvatura incognita di esso, la quale quanto picciola sia dice il Venturoli, potrà sempre molto svario produrre: e il metodo quindi che il Brunacci ha proposto per la misura di questo angolo quantunque assai ingegnoso, non risulta nel fatto di alcuna utilità. Intanto egli asserisce che nella pratica si è sempre trovato quest' angolo di pochi gradi, picciola la curvatura, e perciò l' uno e l' altra

trascurabile, e quindi quella profondità sensibilmente eguale alla predetta lunghezza. Ma se ciò avrà potuto aver luogo ne' piccoli canali a' quali io penso che si rapporti quanto il Brunacci asserisce, non potrá verificarsi nei fiumi grandi e profondi; in quelli il filo è assai corto, e perciò intermettendo molta differenza nel peso delle due palle come insinua il Venturoli, è facile produrvi uno stiramento presso che rettilineo, e far che l' istrumento eretto proceda; in questi però pei quali il filo è molto lungo, non parmi che esso debba ubbidire sotto l' azione della corrente alla tenzione della palla inferiore, e lo stesso effetto risultarne; anzi sembra che se ne dovesse agévolare il rompimento a cui va altronde soggetto; e così portare a doversi ingrossare, e a non esserne perciò più trascurabile come insensibile la sua resistenza. Potrebbe al filo sostituirsi una verga inflessibile e sottile onde prevenirne gli effetti della curvatura. Ma in questo caso pare non potrebbe trascurarsi l' impressione che per parte della corrente riceve. Quindi sembra da quanto si è detto risultarne che il galleggiante composto, utile e commendabile ne' piccioli canali, a' quali il suo primo inventore Mariotte lo addisse, punto non lo sia in generale e principalmente a riguardo de' grandi fiumi, come il Brunacci riproducendolo, teorizzandolo e l' uso estendendone ha voluto proporcelo.

24. Un altro strumento che molti autori garantito hanno per le misure in discorso è il *Pendolo Idrometrico*, di cui se ne deve al Guglielmini la prima idea. Questo strumento proposto quasi contemporaneamente al precedente ed al medesimo oggetto

di supplire all' insufficienza del galleggiante del Castelli, non consiste che in una palla attaccata ad un filo sospeso, secondo il suo primo inventore, al centro di un quadrante graduato, onde sommersa nella corrente e da essa sportata, misurarne l'angolo di deviazione dalla verticale. Misurato quest' angolo si è creduto potersene conchiudere la cercata velocità della corrente. In effetto supposto che

φ sia l' angolo misurato di cui si parla

Φ quello che il filamento fluido corrente ad investire la palla fa colla verticale

p il peso della palla

v la velocità che essa vi acquista

dippiù supposto giusta le esperienze ricevute, l' urto del fluido come il quadrato della velocità; α un' indeterminata significante la legge qualunquesiasi di questa proporzionalità, sarà αv^2 la quantità dell' impulsione dalla palla ricevuta: e quindi costruendo sulle due forze p, αv^2 il parallelogrammo corrispondente, si avrà un triangolo avente per angoli $\Phi - \varphi$, φ opposti a'lati da queste due forze rappresentati, triangolo che darà

$$p : \alpha v^2 :: sen(\Phi-\varphi) : sen\,\varphi, \text{epperò } v = \sqrt{\left(\frac{p\, sen\,\varphi}{\alpha\, sen(\Phi-\varphi)}\right)}$$

Questa conchiusione matematicamente vera, non lo è fisicamente, dipendendo dall' angolo φ che si suppone eguale a quello dato dal quadrante per la deviazione del filo; e perciò che il filo non senta l' azione della corrente che tende a curvarlo, e si mantenga in linea retta. Ma esso però concepisce effetti-

vamente una certa curvatura che non saprebbe riconoscersi con giustezza che colla data della stessa scala delle velocità che si cerca di determinare. E l' angolo φ impiegato nel calcolo, non è in sostanza che quello formato dalla verticale coll' ultimo latercolo della curva, in cui si conforma il filo per l'azione della corrente, cioè colla sua tangente nel punto estremo ove contatta la palla; nel mentre che quella cui porta il quadrante, non è che fra la verticale e la parte fuori acqua di essa, la direzione della quale tantopiù aberra da questa tangente quanto maggiore è la curvatura della parte sommersa, epperò quanto più rapida la corrente. Onde è che questo metodo conosciuto sotto il nome di *quadrante idrometrico*, tanto a riguardo di cotesto vizio, quanto pel tremolìo concepito altronde dal filo, e per la somma difficoltà di mantenere nella pratica dell' operazione fermo e verticale il quadrante, riuscisse inesatto e niente sicuro, come le moltiplici esperienze del Zendrini del Michelotti e di alquanti altri hanno comprovato; e che nelle forti e furiose correnti, in quelle principalmente per le quali si ha speciale bisogno di cosiffatte operazioni, divenisse sì incerto e fallace che non avvi oggi idrometra di qualche credito che se ne fidasse.

L' inesattezza di questo metodo fece pensare a modificarlo e correggerlo. Il Ceva riferisce il P. Grandi, sostituì al quadrante una squadra a braccia ineguali, girevole sopra il suo vertice e graduata nel picciolo braccio con minute divisioni: ei quindi ne usava disponendo il maggior braccio secondo la direzione che il filo prendeva; ed osservando la di-

visione marcata da un piombino pendente dalla stessa estremità del minore allorchè cadea verticale, ne conchiudeva l'angolo φ, e per esso la cercata velocità. Altrimenti il Zendrini procedeva: una specie di compasso di proporzione ei vi sostituì, portando in un gambo sul punto di mezzo pendente un piombino e il pendolo, e la scala delle tangenti dell'angolo φ sull'altro: quindi situando quest' ultimo parallellamente alla corrente, ed aprendone l' altro di tanto che il piombino andasse a segnare alcuna delle divisioni della scala, ne deducea così l' angolo di deviazione φ del pendolo dall' acqua sportato; e infine a conchiudere ne veniva l' assoluta velocità dello strato. Il Ximenes venne egli pure a proporne una sua modificazione. Ma noi non ci arrestiamo sulla minuta discussione di queste machinette, delle quali gli stessi loro autori sembra che ne fossero restati poco sodisfatti e sicuri. Passiamo piutosto a far menzione del metodo proposto dal prof. Venturoli, che va indipendente del tutto dalla misura dell' angolo φ.

Fa il Venturoli passare il filo del pendolo pel canale di una mobilissima puleggia di rimando, e fa pendere dalla sua estremità libera un peso tale P che tenga in equilibrio la palla investita e trasportata dalla corrente: quindi dato questo peso ne ha egli conchiuso la proposta velocità. In effetto la forza agente sulla palla non consiste che nella risultante delle due forze p, av^2 rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo formato sopra di esse: epperò chiamando R questa diagonale, e β l' angolo

da coteste forze composto, si avrà dalla trigonometria analitica

$$R = \sqrt{(p^2 + 2\alpha p v^2 \cos\beta + \alpha^2 v^4)}$$

Intanto l' impulsione effettiva della corrente non si esercita sopra i rispettivi punti della curva filare che secondo il perpendicolo. Quindi facendo astrazione del peso del filo come insensibile rispetto alla detta forza d' impulsione; e sapendosi per un teorema di statica che la curva di equilibrio di un filo da più forze normali sollecitato, ha in tutti i suoi punti una egual tenzione, ne avviene che il peso P misura di detta tenzione in un punto estremo del sistema, sarà eguale alla forza R misura di essa nell' estremo opposto: epperò si avrà l' equazione di condizione

$$P - R = 0\text{: donde } v = \sqrt{\left(-\frac{p\cos\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{P^2 - p^2(1 - \cos^2\beta)}\right)}$$

risultato che nel caso in cui la corrente procede orizzontalmente diviene

$$v^2 = \frac{1}{\alpha}\sqrt{P^2 - p^2}$$

risultato che avendo luogo sotto la condizione che il filo sommerso venisse spinto in ogni suo punto dalla forza della corrente ad esso normale che dico N, coesisterà coll' equazione

$$dy\int N\,dy - dx\int N\,dx = 0$$

che sappiamo rappresentarne la curvatura: risultato dico che darà la soluzione completa della questione; poiché mentre esso esibirà la velocità indipendentemente dalla curvatura del filo, questa equazione ne darà la coordinata corrispondente alla profondità della palla, cioè dello strato a cui quella velocità si appartiene, vale a dire la velocità assoluta cercata. Ripetendo le immersioni del pendolo; variandone la lunghezza del filo; e misurando corrispondentemente la tenzione costante P, si arriverà a conchiudervi la scala onde le velocità procedono secondo la verticale. Quindi l' uso pratico di questo strumento non si riduce che alla misura esatta della tenzione, e alla determinazione di quella coordinata; determinazione però non necessaria che sol quando si tratta della velocità assoluta dello strato. L' agitazione intanto del filo che abbiamo veduto contribuire ad alterarne i risultati sotto la sua costruzione del quadrante, non potrebbe del pari influire sulla precisa determinazione della tenzione P? A questo proposito gioverebbe portare alla prova l' istrumento ed aspettarne la decisione del fatto. La determinazione dell' estensione del filo pari alla profondità dello strato che potrebbe esserne egualmente disturbata, non potrà trovare altra risorsa diretta che nell' analisi di quell' equazione cercandovi x; risorsa però di pura teoria, e di nessuna utilità in fatto di pratica; poichè detto r il raggio di curvatura, sarà (mie lezioni tomo 1 n.81)

$$r = \frac{(1+\Gamma_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma_x}$$

epperò (Venturoli tom. 1.n.175) $N=\frac{P}{r}=\frac{Pf''_x}{(1+f'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$

ovvero supposto $f'_x=y'$

$N=\frac{P\frac{dy'}{dx}}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ donde quella equazione si trasforma nella

$$y'\int\frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-\int\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

vale a dire

$$\int\frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y'}\int\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

equazione la di cui integrazione niente ci promètte in vantaggio della questione. Ma questa ricerca non è punto necessaria nel nostro caso, in cui si tratta della semplice scala delle velocità, onde indurne la media che ci abbisogna.

Intanto possiamo conchiudere che questo metodo di costruzione del pendolo del Guglielmini proposto dal Venturoli, tuttochè non vadi esente di timori relativamente alla giustezza de' suoi risultati, è però sempre più semplice e sicuro di quello ordinario, non dovendo portare che ad errori sempre più piccioli.

25. Qui sarebbe il luogo di parlare di alcuni strumenti, la di cui operazione dipendendo essenzialmente dall' uso di una palla esposta all' urto della corrente mercè di un filo flessibile, possono in certo modo considerarsi come rientranti nella classe dei

pendoli idrometrici: tale sarebbe la *statera a molla* dall' abb. Ximenes proposta nel 1752; tale il suo *castello di orologio*; tale la *statera* dal cav. Lorgna prodotta nel 1777; tale il *contrapeso idraulico* dato dal Barbantini nel 1814. Ma le difficoltà che nella statera del Ximenes s' incontrano in metterne a calcolo il peso da cui dipende tutta la sua operazione, e in valutarvi l' attrito che ne risulta per cui assai imperfetta si rende; ma gl' inconvenienti al suo castello di orologio connessi, inconvenienti assai marcati e dalla complicazione derivanti del suo roteggio e dai molti attriti cui va soggetto e che i risultati ne fanno sempre incerti e poco esatti; ma l' imbarazzo dico che si fa sentire nella statera del Lorgna in doversi mantenere il filo nella corrente secondo la sua direttrice, dal che la misura esatta della sua impressione sulla palla dipende; ma le difficoltà dico finalmente che si provano nel contrapeso idraulico del Barbantini, difficoltà sì sentite dal suo autore medesimo che si diede egli stesso a rimarcarle e a prevenirle: ma tutti questi inconvenienti io ripiglio che niun successo ci annunziano da poterne sperare, e che di niuna confidenza ci potrebbero essere, fanno che punto io non entrassi in discussione a loro proposito. E contento di averne dato notizia per potersi, volendosi, altrove riscontrare, come in una memoria del prof. Masetti di cui darò conto qui appresso, passo a parlare di una nuova modificazione del pendolo idrometrico nel 1797 dal medesimo Venturoli proposta sotto il nome di Pendolo idrometrico composto.

26. Tutta la differenza tra il pendolo idrome-

trico semplice e il composto, non consiste che nell' essere cangiato il filo in un' asta cilindrica mobile intorno ad un punto fisso. Questo cangiamento è quello che porta dunque al pendolo composto, che il suo autore medesimo ha teorizzato, e che io dietro a lui vengo a darne rapidamente ragione colle quattro considerazioni seguenti. 1° L' angolo φ di deviazione dell'asta dalla verticale è il principio fondamentale di questo strumento: quest' angolo potrà misurarsi mercé di un quadrante; o determinarsi uso facendo della formoletta $\varphi = \frac{n}{m}$ ove m, n significano la lunghezza e l'altezza osservata della parte fuori acqua dell' asta.

2° Quest' angolo non è che l' effetto dell' azione simultanea normale all' asta del suo peso P che tende a ridurla alla posizione verticale, della spinta S del fluido che tende ad allontanarnela, e dell'impulsione della corrente C che tende pure ad allontanarnela.

3° Chiamate a, l, k il raggio la lunghezza e la gravità specifica dell' asta si avrà

$$P = k\, l\, \pi\, a^2 \operatorname{sen} \varphi,\ S = \pi\, a^2 (l - m) \operatorname{sen} \varphi:$$

dippiù chiamate $\beta^{(r)}$ il numero r delle particelle in cui la parte sommersa dell'asta si suppone divisa; particelle che per essere cilindriche patiranno una resistenza giusta le esperienze adottate, eguale agli $\frac{11}{20}$ di quella della loro rispettiva sezione longitudinale $(= 2\, a\, \beta^{(r)})$; e finalmente chiamate $h^{(r)}$ le altezze dovute alle velocità $v^{(r)}$ degli strati della corrente a queste particelle corrispondenti, si avrà per essere l' urto diretto dei

fluidi eguale ad un prisma avente per base il piano urtato e per altezza la dovuta alla sua velocità (eprò $= \frac{11}{20} \cdot 2a\,\beta^{(r)} h^{(r)}$), si avrà dico $C = \frac{11}{20} \cdot 2a\,\beta^{(r)} h^{(r)} \cos^2 \varphi$ per quello obbliquo che ciascuna di esse particelle sostiene sotto l' incidenza eguale a $90° - \varphi$.

4° Dette finalmente $\omega, \alpha^{(r)}$ la distanza del centro di gravità dell' asta dal suo punto di sospensione, e le r rispettive distanze da questo medesimo punto di quelli delle $\beta^{(r)}$ particelle, si avrà per esserne $\frac{m+l}{2}$ quella del punto di mezzo della parte sommersa dell'asta, a cui la spinta del fluido si suppone applicata, la equazione

$$P\omega - \frac{S}{2}(m+l) - \sum_{1}^{r} C\,\alpha^{(r)} =$$

$$\frac{5}{11}\,a\pi \frac{\tan\varphi}{\cos\varphi}\left(2kl\omega + m^2 - l^2\right) - \sum_{1}^{r} \beta^{(r)} h^{(r)} \alpha^{(r)} = 0$$

sotto la di cui condizione l' asta cesserà di oscillare, si arresterà e lo stato di equilibrio del sistema rappresenterà. Quindi deducendo da questa equazione le altezze $h^{(r)}$ dovute alle velocità $v^{(r)}$, se ne avranno le stesse velocità, ed in esse la cercata scala. Il metodo per ottenerne effettivamente le $h^{(r)}$ non consiste che in combinarla col metodo pratico di applicare lo strumento, cioè in eseguire mediante esso una serie di esperimenti, profondandone successivamente con ordine l'asta a diverse profondità della stessa verticale. Questo metodo secondo prescrive il suo autore (Op. cit. n. 509), si riduce a condurlo in maniera che mantenendo il punto di sospensione dell' asta nella stessa

verticale, vi si vadi consecutivamente abbassando di una di due di tre ec delle particelle $\beta^{(r)}$ con incominciare da quella del suo piede; e quindi misurandovi corrispondentemente i rispettivi angoli di declinazione φ che va acquistandovi l' asta, e le rispettive parti m che va lasciandovi fuor acqua, formarne una serie r di equazioni simili alla generale trovata che tutte le rappresenta; talmentecchè dicendone $M^{(r)}$ il primo rispettivo termine si presenterà sotto l' aspetto

$$M' - \beta' h' \alpha' = 0,\; M'' - \sum_{r=1}^{r=2} \beta^{(r)} h^{(r)} \alpha^{(r)} = 0,\; M''' - \sum_{r=1}^{r=3} \beta^{(r)} h^{(r)} \alpha^{(r)} = 0, \text{ec}$$

Queste equazioni trattate con un metodo di eliminazione daranno le $h^{(r)}$, e quindi ausiliata dalla nota equazione $v^{(r)} = \sqrt{2gh^{(r)}}$, le velocità del fluido alle diverse profondità delle consecutive immersioni della asta, epperò la scala delle velocità secondo quella verticale.

Intanto prima di conchiudere il rimarcare giova che questa teoria dall' istesso Venturoli data nell' opera più volte citata, dipende dalla legge newtoniana dell' urto obbliquo de' fluidi: e perciò essendo la velocità della corrente tanto rapida che desse $\varphi > 30°$, allora non avrà essa più luogo come noteremo più distintamente qui appresso (33); inconveniente dice il suo stesso autore a cui potrà ovviarsi nella pratica, facendo vuota l' asta onde al bisogno si potesse caricare sul fatto istesso dell' esperimento con dei piombini e rendersi così meno sensibile all' impulso della acqua.

Questo strumento non vi ha dubbio che va e-

sente dai difetti provenienti dalla curvatura e dal tremolio del filo, a' quali il metodo ordinario di costruirlo va soggetto; ma perde molto però dalla banda della sua teoria: il calcolo che essa conduce vi diviene lungo e laborioso, il quale stante la moltiplicità delle ripetite operazioni all' uopo occorrevoli, sembra che debba renderne difficile l' uso e la pratica: e se a questa difficoltà quell' altra si unisce di mantenerlo verticale ed immobile nel processo di tanta moltiplicità di operazioni, difficoltà veramente somma ne' grossi fiumi rapidi e furiosi, pare nonostante che abbia sembrato a qualche idraulico distinto, quello che meritasse fra i conosciuti la maggior confidenza degli idrometri, pure dico che bisogna aspettarne la sanzione del fatto sperimentale, al quale per quanto io sappia è stato poco sottomesso finora. Quindi credo potersi conchiudere perora a questo riguardo colle idee del Conte Mengotti, quelle di essere desiderabile che venisse provato con un sufficiente numero di esperienze, onde potersene il merito più fondatamente apprezzare.

27. Pria di lasciare le machinette idrauliche a cui il Castelli e il Guglielmini, fondatori della scienza idraulica nata e cresciuta in Italia, hanno dato luogo, mi sembra conveniente di far parola della risorsa dal primo presa e dal secondo con delle madificazioni adottata e seguita, onde andare direttamente alla determinazione della portata.

Nei tratti non molto irregolari e principalmente in quelli del tutto regolari, la velocità della sezione può per l' ordinario contarsi per costante; verità che prescindendo delle alterazioni da ostacoli acci-

dentali causati, l'analisi dimostra e l'osservazione comprova: inoltre le acque scorrono per gli alvei colla superficie al fondo parallela, epperò orizzontale quando tale vi è il fondo, circostanza che si osserva costantemente ne' tratti regolari a sponde parallele e verticali e nello stato di acque con moto permanente e regolare. In un tratto cosiffatto dunque bastava misurare la velocità superficiale onde prontamente averne la portata. Quindi il Castelli concepita l'idea del suo galleggiante, e venuto nell'opinione che la velocità nella sezione si fosse in generale variabile, per farne utilmente uso dovette esser portato a quell'altra di dare artificialmente allo alveo quella forma rettangolare, che la natura ordinariamente ci nega; all'idea dico di un regolatore; che è quanto dire, di apporre all'alveo un breve tronco di canale costruito in legname o in muratura e in forma rettangola, e far che la massa del fluido tutta vi s'imboccasse e vi scorresse. Ma quest'idea sì semplice e naturale, sì confacente al fine proposto, non può risultare sì agevole in fatto di pratica. La massa fluida obbligata a ristringersi nel canale del regolatore, perderà il parallelismo delle sue vene: queste divenendo oblique, verranno ad inflettersi le une contro le altre; la regolarità del movimento vi verrà allora a mancare; e l'idea di contare la portata sul prodotto della sezione rettangola per la velocità, non sarà più giusta e permessa. Inoltre la costruzione di un'opera siffatta non può riuscir manegevole che per canali assai piccoli: per quelli a gran dimensioni le difficoltá si moltiplicano non solo a riguardo della mano d'opera, ma ancor della spe-

sa; difficoltà che alla fin fine dovranno divenire cotanto gigantile, che l'opera non potrà avere più luogo. Il Castelli stesso che col nome di regolatore la disse, che l'uso ne sposò e ne commendò, lasciar non potè di sentirle, confessando che ne' grossi fiumi cosiffatte spese non sono proprie che de' gran personaggi, onde evitare spese ed inconvenienti maggiori.

28. Dopo del Castelli il Guglielmini si valse pure del regolatore per conseguire il medesimo fine, ma con modi diversi. Il Castelli applicava il regolatore al canale che intestava nella parte ad esso inferiore: quindi in una delle due ripe presso l'intestatura vi disponea immediatamente se si trattava di un piccolo canale, o in quella di un canaletto del pari armato del suo regolatore e derivato dal canale superiormente al gran regolatore se di uno grande si trattava, vi disponea dico un sistema di sifoni tali che l'acqua superveniente ne assorbissero mentre il livello costante vi si mantenesse: e finalmente misurandovi l'acqua data immediatamente dai sifoni, tutto di seguito ne conchiudea nel primo caso la portata, e nel secondo quella del canaletto, colla quale mercè il rapporto delle altezze e larghezze dell'acqua scorrente pe' due regolatori e la sua nota legge delle portate in ragion dupplicata delle altezze e semplice delle larghezze, la portata del gran canale ne determinava. Non così il Guglielmini: applicava egli una cateratta al regolatore, che scender facea sino ad uno o due piedi sotto il pelo, lasciando soltanto aperta una luce rettangola: l'acqua correndo veniva così a gonfiarsi, appoggiandosi superiormente alla cateratta fino ad equilibrarvisi e ad acquistarvi

per un certo tratto all' insù superficie permanente e come stagnante: con questa operazione fatto

α, S l' altezza e l' area della luce

a l' altezza dell' acqua ad essa sovrabattente

h l' altezza dovuta $\left(=\frac{4}{9\alpha^2}\left(\sqrt{(a+\alpha)^3}-\sqrt{a^3}\right)^2\right)$ alla velocità dell' acqua

P la portata del canale

ne risultava che l' acqua del canale a restringersi veniva; e obbligata a passare sotto il battente a per quella luce come se dall' orificio di un vaso sgorgante, dava una portata che potrebbe rappresentarsi colla formola analitica

$$P=S\sqrt{2gh}=\frac{2S\sqrt{2g}}{3\alpha}\left(\sqrt{(a+\alpha)^3}-\sqrt{a^3}\right)$$

a cosiffatto caso corrispondente e che vi si prendea per quella cercata del fiume

Ma questo metodo oltre le difficoltà inerenti alla natura stessa della macchina e comuni al metodo del Castelli, delle altre ne presenta che ne rendono ancor più difficile l' uso e l' applicazione. Il Prony per rendernela superiore in una memoria che diede nel 1802 sotto il titolo *sur le jeaugeage des eaux courantes*, ne propose delle modificazioni che mentre ne prevengono gli inconvenienti, ne rendono però sì imbarazzante la composizione e sì difficile la pratica operazione, che non è da sperarsene successo. Donde è che il Venturoli si fece a proporvi invece un certo artificio che applicato immediatamente alla costruzione del Guglielminiano ne venisse a riuscire più

facile e più sicura la proposta conoscenza. Qui intanto non entriamo nel dettaglio critico di una siffatta questione, abbastanza nota e discussa. Potrà riascontrarsi l' opera citata replicatamente di questo insigne idraulico per averne una sufficiente notizia; opera ove si troveranno riunite le difficoltà del metodo del Guglielmini con qualche non dispregevole risorsa per prevenirle; e gl' incovenienti di quella del Prony con delle utili proposte a poterli evitare e a supplirvi.

29. Un applicazione felice alla dispensa e misura delle acque correnti ha fatto il Tadini del regolatore del Castelli nella dotta memoria da noi più volte citata. La macchina da lui detta con questo nome, in ossequio ei dice dell' inclito bresciano primo fondatore della scienza idraulica, che una per simil uso immaginata ne chiamò così, non si conpone che di quattro parti distinte: 1° da un canaletto derivato dal canale maestro mercè una cateratta con imposta, onde regolarvi la quantità d' acqua alla dispensa necessaria; canaletto da lui chiamato *bottino*, che va direttamente a collimare coll' asse del regolatore detto *doccia*, e tanto lungo quanto basti acciò l' acqua che alla doccia trasmette, arrivi al suo sopraciglio, ed ivi placida e tranquilla in superficie, vi formi il genuino e convenevole battente: 2° da una specie d' imbuto coperto, con delle sponde circolari ma di gran raggio se sommo rigore si ricerca, oppure rettilinee se cotanto non se ne richiede; imbuto che forma il fronte e il prospetto di entrata della doccia, la bocca io dico per cui l' acqua vi penetra, l' ordigno per cosiddire onde vi si

previene la contrazion della vena: 3° dalla doccia che forma la parte principale della macchina, che ne è propriamente il misuratore dell' acqua, e che non consiste che in un corto e ristretto tronco di canale con fondo orizzontale, sponde parallele verticali ed egualmente alte, e costrutto in legname o in muratura, di pietra ordinaria o di marmo: 4° finalmente da una traversa di ferro o di duro marmo, innalzata sul fondo nella bocca posteriore della doccia, e tanto alta quanto sufficiente fosse onde l' acqua stando a giusto battente venisse frenata nello sbocco, e così sollevandosi sino a livello delle sponde vi scorresse a piena doccia. Io non entro nel minuto dettaglio di questa macchina, del suo uso, de' suoi vantaggi: sene potrà avere un' ampia conoscenza nella memoria citata. Mi fo soltanto a rimarcarne così di passaggio, che essa non va punto soggetta alle difficoltà di applicazione al pari di quelle del Castelli e del Guglielmini, riuscendo sempre di piccola estensione nel fatto di pratica a cui va destinata; che in essa sostiene il suo autore, tutto cospira alla giustezza del fine che si propone, riesce in tutto superiore a qualunque altro mezzo usato finora per la misura e dispensa delle acque; può loro servire come di modulo e di verificazione ne' risultati, porge infine piena soddisfazione non solo al geometra che ne sente l' efficacia della dimostrazione, ma all' occhio ancora dell' idiota compratore che il suo dato si vede a piena e rasa misura.

30. A conseguire il medesimo fine varj e diversi altri strumenti si sono immaginati e proposti. Potrebbe a questo proposito riscontrarsi una memoria

del Prof. Giambattista Masetti nel secondo volume dell' anno 1824 pubblicata della raccolta di autori italiani sopra il moto delle acque, nella quale una estesa discussione se ne troverà. Questo lodevole lavoro va diviso in tre parti; la prima istorica, la seconda descrittiva; la terza dimostrativa. Nella prima vi si siegue l' ordine cronologico delle epoche nelle quali ciascuno strumento è stato immaginato e proposto. Nella seconda quello vi si trova della successione degli oggetti a' quali gli strumeneti vanno destinati, e al modo insieme onde vi si applicano: epperò essi che dal greco vi sono detti *Tachimetri idraulici*, vi vengono divisi in due generi; l' uno di quelli per le sole misure superficiali, e l' altro di quelli che possono usarsi a qualunque profondità e che si estendono alla ricerca della scala delle velocità e della velocità media; generi entrambi divisi in due classi, quella de' fissi e quella de' galleggianti. Finalmente nella terza parte quell' ordine progressivo vi si siegue che si è nella seconda tenuto, esponendovisi tutte le teorie analitiche meccaniche geometriche che se ne sono particolarmente date. Qui non ho io tralasciato di profittare all' opportunità di questo degno e utile travaglio: e nonostante che non siami venuto alle mani che scritta questa seconda parte alla quale solo si rapporta, mi son fatto a giovarmene, introducendovi alla convenienza alcune picciole e più minute notizie che prima non aveva.

31. Dopo questa specie di digressione brevissima, riprendo il filo delle mie idee.

Il Nadi uno ne propose nel 1721 all' occasio-

ne di una visita al Po. Questo strumento che sotto il nome si conosce di *fiasca idrometrica*, non è che un parallelopipedo rettangolo di latta avente un picciol foro verso la sommità della faccia minore, un tubo sottilissimo annesso verticalmente alla sua base superiore, e un filo il quale passando per di dentro di questo tubo penetrava nell' interno della cassetta parallelopipeda e veniva ad essere ligata ad una molla, mercè di cui si veniva ad aprire o chiudere al bisogno il detto foro. Sommerso l' istrumento a diverse profondità con tenerne il foro direttamente contro la corrente, l' acqua vi entrava per esso, e dalla quantità che ve ne entrava, si credeva di potersene arguire la cercata velocità. Infatti portato l' istrumento alla prova dell' esperimento nelle acque del Po, fu trovato che la quantità penetratavene in tempi eguali seguiva costantemente la legge della ragione sudduplicata delle altezze del fiume al di sopra del foro, e se ne conchiuse che la velocità nel locale in osservazione seguisse quella data legge. Ma riportato l' istrumento al fatto di nuove prove, trovossi per quanto il P. Grandi e il Manfredi ne riferiscono, che dava gli stessi risultati in acqua stagnante che dato avea nella corrente del Po. Ond'è che fu duopo definitivamente conchiuderne che quella legge delle velocità dovesse riguardarsi come viziosa ed erronea, che il metodo proposto dal Nadi come inutile fosse riputato, e l' istrumento caduto in discredito e rigettato.

Non fu più felice il risultato della modificazione che si pretese fare di questo strumento. Per quello che il P. Grandi ci ha rapportato, si volle muni-

re il foro di un cannellino ad oggetto che l' acqua vi entrasse a guisa di un getto parabolico, e che andando a percuotere un'assicella verticalmente situata sul fondo della cassetta parallelopipeda, dall' altezza del punto che ne bagnava sull' orizzontale concepita pel foro, se ne pretendea derivare la legge della velocità. Ma la difficoltà di distinguervi e definirvi il punto bagnato fu intesa tanto che il nuovo artificio proposto nemmeno fosse portato alle prove, e che il tachimetro del Nadi fosse restato nella piena dimenticanza in cui era caduto.

32. M. Pilot in una memoria fra quelle dell' Accademia reale delle scienze per l' anno 1732, l'. uso propose di un altro semplicissimo strumento che il cav. Dubuat ha in seguito perfezionato come egli stesso ci dice, e quindi usato con successo e utilità. Consiste questo strumento in un tubo ricurvo di vetro, che si assicura nella corrente mediante una macchinetta dal suo autore stesso descritta nella memoria citata. Situandone la bocca del braccio orizzontale direttamente contro la direzione del corso dell' acqua, si noterà la linea di livello a cui essa si innalzerà in quello verticale: quindi rivolgendo il tubo colla detta bocca dalla banda opposta, se ne noterà quell' altra a cui l' acqua vi discende: e finalmente la differenza prendendo fra le altezze delle due linee di livello, se ne avrà l' altezza dovuta alla velocità cercata, e con essa la velocità stessa della corrente. Questo metodo di cui è facile rendere ragione, è stato attaccato e contradetto dal Zendrini e dal Michelotti: ma il Bonati uso facendo di un tubo di latta portante una sottil bacchetta divisa in

parti eguali, e galleggiante nel braccio verticale sulla linea di livello a cui l' acqua vi si arresta, ad oggetto di poterne senza stento misurare la posizione, dissipó colle sue esperienze le difficoltá da essoloro prodotte. Intanto il tubo idrometrico é stato sottoposto all' esame non solo da' mentovati idrometri ma da più altri diversi sì italiani che francesi: il Ximenes il Venturoli ed altri in Italia, il Belidor il Gauthey il Navier ed altri molti in Francia, si sono dati di proposito a riconoscerne le qualità gl' inconvenienti i difetti: e noi senza venirvi a special discussione, raccogliendo dal quanto se ne è detto e pensato conchiudiamo, che il più forte inconveniente e forse irriparabile che esso presenta nella pratica applicazione, si è quello della somma difficoltà di poterlo solidamente stabilire nella corrente. La macchina onde si pretende effettuarlo, alterando senza dubbio il corso delle acque se molto solida e composta, farà che le velocità osservate non siano più quelle che al fiume libero si competono; ovvero se molto semplice e poco solida, comunicando colla sua mobilità de' movimenti di oscillazione all' acqua interiore, movimenti dice il Bossut che espongono a degli errori sensibili nella stima delle sue elevazioni, ne le renderà sempre incerte e inesatte. Questo inconveniente che riesce tanto più grande e marcato quanto più rapida è la corrente, maggiore la profondità cui l' istrumento si fa discendere, perde molta forza nelle tarde correnti: ma in questo caso un altro non meno molesto se ne va ad incontrare; inconveniente che niun buon risultato ci dà da sperare dalle indicazioni dell' istrumento: infatti la colon-

na che nel tubo verticale misura l'altezza dovuta alla velocità, sarà troppo picciola, e perciò ogni piccolissimo errore potrà produrre un divario notabile nella misura cercata. Quindi il tubo idrometrico che per la sua semplicità acquistò una tale confidenza che preferito veniva, principalmente dagli idrometri francesi, a qualunque altra machinetta, oggi che se ne sono riconosciuti dice il Masetti, gl' inconvenienti inevitabili è venuta di molto a perderla, e per cui poco usato si vede.

33. Senza arrestarci sull'Odometro di M. Dubuisson, di un altrosimile di M. Brouckener, e sopra un istrumento a M. Savarien dovuto e dal Ximenes riferito, perchè poco fra noi conosciuti; senza parlare del Cilindro galleggiante di M. Mann inglese perchè dal P. Lecchi anteriormente proposto, della Paletta idrometrica di M. Gauthey perchè poco giustezza promette ne' risultati, dell' Animometro di M. Leslie perchè molte difficoltà presenta da poterne sperare successo; senza fermarci a parlare del Pendolo del Ferrari sopra un falso principio fondato, del Vette e del Mulinetto del Focacci che positiva contezza non ce ne ha dato ma che si è piutosto attenuto delle esperienze a descrivercene in un canale artefatto eseguite, della Varvola di Ximenes di cui niuno degli idrometri ha parlato e i di cui gravi inconvenienti non punto e niente combendano; senza parlare dico di questi e di altri pari strumenti che discussi ho trovato nella memoria citata del prof. Masetti, ove riscontrar si potranno da chiunque il volesse, noi continuamo il nostro cammino, e passiamo a far menzione della Ventola del Ximenes che seb-

bene fosse stata cotanto sul principio applaudita, non ha trovato in progresso che la sorte medesima di tutti gli altri.

34. Di questo tachimetro usò il nostro illustre compatriotta tanto per la ricerca della legge delle resistenze quanto per la misura della velocità. La costruzione che egli ce ne ha dettagliato nelle sue *nuove esperienze idrauliche* rese pubbliche nel 1780, non si riduce che ad un albero portante una lastra metallica detta *Ventola* e da cui l'istrumento ha preso il nome, lastra che si muove lungh'esso sopra due braccioli; ad una rotella fissata in cima col piano al suo asse normale; e ad una picciola fune che accavallata a questa rotella va a passare per una puleggia di rimando, e viene a finire un peso sostenendo. Il suo uso si riduce a stabilire l'albero verticalmente nella corrente aggirantesi sopra due perni fissi, ed in maniera onde la Ventola profondata fino allo strato aqueo in osservazione, restasse esposta alla sua impulsione diretta, nel mentre che la puleggia verrà stabilita dalla banda opposta, e nel medesimo piano. La sua applicazione infine alla misura della velocità dello strato non consiste che in dare al peso in sospensione una tal quantità che contrabilanciasse l'urto della corrente sulla ventola. Quindi dicendo.

λ l'altezza dovuta alla velocità cercata della corrente
γ, P l'area della ventola e il peso in sospensione
R, r la distanza del centro di gravità di quella e di questo dall'asse di rotazione dell'albero
si avrà per l'equazione di equilibrio del sistema

$$\gamma R\lambda - Pr = 0\text{, ovvero per essere } v = \sqrt{2g\lambda}$$

$$\gamma Rv^2 - 2gPr = 0\text{: donde } v = \sqrt{\left(\frac{2gPr}{\gamma P}\right)}$$

per la cercata velocità dello strato aqueo di cui si tratta

Questo strumento già conosciuto sotto il nome di *Ventola idrometrica* sarebbe molto commendabile nella pratica se più semplice ne fosse l'apparato e meno operoso il maneggio. Esso si sperimenta molto difficoltoso nell'applicazione al fatto; assai incerto nei risultati, principalmente nelle alte piene ove se ne ha maggiore bisogno, e nelle quali il suo medesimo autore ha disperato di poterne far uso e trarne profitto.

35. Gl' inconvenienti del quadrante idrometrico e di molte altre macchine, dicono i PP. Cannovai e del Ricco nella discussione idraulica della loro fisica matematica, hanno fatto sostituirvi da taluni un grosso cilindro di legno leggiero, un poco meno lungo della profondità della corrente; armato in una delle basi di varj piccioli pesi capaci a mantenerlo sommerso a fior d' acqua e verticale; portante nell' altra una picciola verga, onde sporgendo fuori acqua vi mostrasse gli occulti movimenti della parte sommersa. Esponendo in un tratto molto regolare diretto e libero alla corsa delle acque il cilindro, ripetendo questa operazione or verso le sponde ed or nel filone; notando in ciascuna operazione delle diverse stazioni gli spazj dal cilindro trascorsi in tempi eguali, e prendendo infine di tutti i risultati il medio aritmetico, se ne è conchiusa la velocità

media cercata. In questo metodo io non ravviso che la modificazione dal P. Lecchi proposta in perfezionamento di quello delle aste del P. Cabeo e del Baratteri, che il Mann pubblicò 14 anni dopo in Londra come suo proprio; e che il Navier citandolo, lungi di riconoscervi l' invenzione italiana, non ce l' annunzia che come inglese. Ma questo metodo che ragionato sembra e concludente quando il cilindro naviga con verticale posizione, non ha punto luogo nel caso contrario. Infatti richiamiamoci che il movimento del cilindro non è che il risultato dell'azione simultanea della forza impulsiva del fluido sopra di esso, della sua spinta che lo spinge all' insù e della gravità che lo tira all' ingiù: nel primo caso le due ultime di queste forze dipendendo dal suo angolo di deviazione dalla verticale, punto non influiscono sull'effetto del movimento orizzontale della corrente che lo investe direttamente e senza scomposizione alcuna: in tale caso dunque la velocità del cilindro non essendo che la risultante di tutte quelle de' filamenti aquei che lo animano dalla superficie al fondo, potrà assumersi per la media cercata, cosa che il P. Lecchi ha comprovato *a posteriori* col fatto delle sue esperienze eseguite nel canale arteficiale del fiume Mazza presso a Cassano con un cilindro di 0^m, 3 di diametro, e di 1^m, 2 di lunghezza. Non è così nel secondo che obbliquamente viaggia. Quindi tutto il successo di questo strumento non si ripete che dalla condizione che esso proceda con posizion verticale, o che almeno non ne aberri sensibilmente con delle oscillazioni brusche e frequenti: ma cotesta condizione è forse facile a soddisfarsi? e

ciò maggiormente avendo riguardo alla moltiplicità delle stazioni che il metodo suppone? La risorsa dal P. Lecchi proposta, di guidare cioè il cilindro con sottil filo dalla sponda per impedire che vada a cadere nel filone e continuare il viaggio prescritto, non ne disturba forse il movimento libero, e ne altera il risultato? Non sembra forse che sia esso destinabile al caso di correnti di poca estensione e di corso placido e lento piuttosto che a dei gran canali ed in piena? Ma noi parleremo qui appresso dell' ultimo perfezionamento di questo metodo datoci dal Bonati, della sua teoria, del suo uso pratico.

36. Di un' altra machinetta assai semplice si fa pure menzione, e l' uso se ne rapporta nella citata discussione. Consiste essa in un cordoncino lungo 40 in 50 tese, sul quale scorre un tubo di vetro o metallico che porta annesso al suo fusto un emisfero vuoto di legno. Steso questo cordoncino secondo la direzione della corrente onde l' emisfero ne venga direttamente investito dalla parte della sua concavità; legato colle sue estremità a due canapi spiegati ad esso normalmente a traverso dell' alveo nelle teste del tratto in osservazione, mediante quattro stabili corrispondentemente posti dappresso alle ripe; supposto in fine il tubo preparato della medesima gravità specifica dell' acqua, si vede senza difficoltà che esso correrà colla corrente acquistandovi la sua medesima velocità. Quindi osservando la spazio che vi correrà nel tempo di circa 5", se ne conchiuderà la media cercata. Riconducendo il tubo alla testa superiore del tratto mercè un sottil filo a cui va ligato onde dalla

ripa condurlo, si ripeterà l' operazione dopo averne però rallentato li due canapi, e perciò aver fatto il cordoncino più al fondo discendere: continuando così via via di piede in piede o di mezzo in mezzo piede di profondità a seconda che l' importanza della opera a cui si mira, minore o maggiore accuratezza richiede, si avrà una serie di velocità, che ragguagliate ne daranno la media del velamento aqueo verticale; volocità che cercata per diversi punti di stazione traversalmente per larghezza, ed essi più o meno stretti come più o meno bisogno vi ha di giustezza, e ragguagliatine del pari i risultati se ne conchiuderà la media generale dell' intero tratto. Non mi arresto intanto a considerare qual potrebbe essere l' uso di questa machinetta ne' grossi fiumi e nelle alte piene. Solo mi fo a rimarcare per quanto rilevar se ne possa dalla semplice lettura di una brevissima descrizione che essa sembra addicibile piutosto a quei di mezzana grandezza e in corso ordinario che alle grosse correnti e in istato brusco ed alterato.

37. Un altro strumento sotto il nome di reometro si trova rapportato nella *Biblioteca Universale* pubblicata in Ginevra (tom. 6. 1817).

L' ingegniere tedesco M. Woltmann ne è l' autore, e che lo ha dato in un' opera stampata in Amburgo circa il 1790. Questo strumento conosciuto in Francia dal Gauthey e d' altri diversi, per quanto il Navier in Belidor ne asserisce in opposizione al parere di Trechsel, è stato teorizzato in Italia dal professore Venturoli ed é stato da lui reso alla maggior semplicità di operazione che la sua natura comporta. É questo uno di quegli strumenti che abbraccia nella

sua costruzione un sistema di ruote dentate; sistema che un albero girevole sopra due pernj ingrana mediante una vite perpetua sul suo fusto costrutta. Un picciol volante terminato nelle sue estremità da due ali o lastrine rettangolari, ed infisso col suo punto di mezzo ad una delle due punte estreme dell' albero è quello che esposto all' impulso della corrente lo mette in movimento. In effetto supposte le due ale oblique all' asse dell' albero, ed in modo tale che formino con esso due angoli eguali e volti dalla banda opposta cioè come se opposti al vertice, angoli che dico k; e supposto l' albero situato nella corrente secondo la sua direttrice, e tanto profondato in essa quanto vi resti sommerso tutto intero il volante, ne verrà che le ale ne saranno simultaneamente percosse con una medesima forza. Quindi notando con V la velocità della corrente, ne sarà $V \operatorname{sen} k$ la sua componente nel senso normale al piano A dell' ala: inoltre notando con v la velocità acquistata in un certo istante di tempo dall' ala vale a dire dal volante, velocità che per essere in senso normale allo albero si vede facilmente che fa col piano A della ala un angolo eguale al complemento $(q-k)$ dello angolo k; notandone con v dico questa velocità, scomposta in due altre l' una in questo piano, e l' altra ad esso normale, ne sarà $v \cos k$ quest' ultima, epperò sarà

$V \operatorname{sen} k - v \cos k$ la velocità relativa onde la corrente investe direttamente l' ala

$\frac{1}{2g}(V \operatorname{sen} k - v \cos k)^2$ l' altezza dovuta h a questa velocità

Ah l' urto che l' ala vi riceve normalmente

$Ah \cos k$ la forza acceleratrice normale all' albero.

Intanto questa forza come agisce sull' albero per via di una delle due ale, così contemporaneamente vi agisce per mezzo dell' altra: epperò attesa la loro divisata posizione relativamente all' asse dell' albero, ne avviene che l' una gli comunicherà una quantità di movimento eguale in un senso contrario dell' altra. Quindi per essere il volante infisso al medesimo nel punto di mezzo, ne risulterà che la percossa dell' una e quella dell' altra cospireranno a farlo girare pel medesimo verso; e la forza acceleratrice che il movimento ne animerà, sarà perciò $2Ah \cos k$. Ma quando questa forza perverrà ad essere nulla, il movimento sarà divenuto equabile; dunque sarà

$$2Ah \cos k = V \operatorname{sen} k - v \cos k = 0, \text{ cioè } V = v \cot k$$

la condizione sotto di cui l' istrumento acquisterà un equabilità di moto, cioè un moto regolare e permanente; quello che essendo l' effetto completo dell' impulsione del fluido ne addimostra e misura la quantità.

Questa conchiusione non ha che un essere puramente matematico, in quanto non si è considerata finora la questione che sotto questo solo punto di vista. Quindi rimane ancora di mettervi in considerazione le resistenze fisiche che l' impulsione del fluido prova per parte del volante che vi si muove sommerso, e per esso del meccanismo dell' istrumento. Significando dunque con Qb il movimento di queste resistenze con a la distanza del centro di gravità dell' ala dall' asse di rotazione, sarà $2Aah \cos k$ quello della forza impulsiva del fluido; epperò

$2Aah\cos k - Qb$ la forza effettiva di 'esso: donde si avrà

$2Aah\cos k - Qb = 0$; epperò $V = \frac{1}{\text{sen}\, k}(v\cos k + \sqrt{\frac{Qbg}{Aa\cos k}})$

Risultato che rappresenta lo stato fisico di quello qui sopra trovato ; e che la conoscenza ci porge della velocità cercata V in funzione delle quantità A, a, k che si hanno la prima immediatamente dalla costruzione del semplice meccanismo dell' istrumento; la seconda dalla quantità di Qb che non potendo arguirsi con facilità e giustezza *a priori* mercè la sola conoscenza della sua composizione potrà sempre definirsi mediante una preliminare esperienza (Venturoli op. cit.); e la terza dalla velocità v del volante che si avrà in conseguenza dell' operazione delle ruote dentate (luogo cit.), su di cui non entriamo per brevità potendo pure vedersi nella citata memoria del professore Masetti, operazione che dando a conoscere il numero n delle rivoluzioni da esso fatte in un tempo determinato t, epperò lo spazio $2a\pi n$ da esso percorso in questo tempo ne darà la velocità $v = \frac{2a\pi n}{t}$. Intanto in conchiusione di questa rapida descrizione conviene rimarcare che l' indole di questo strumento vuole che pria di venire all' operazione fosse stabilmente assodato nella corrente; cosa che si effettua mediante un' antenna cilindrica divisa in parti metriche e verticalmente piantata sul fondo dell' Alveo: a questa antenna va legato il telajo dell' istrumento in modo che possa scorrere lungo di essa, e potersi così abbassare come alzare secondo la verticale nella corrente. Quindi immaginando la massa fluida divisa in tanti strati, alti quanto

lungo il volante, di sei pollici circa ; o che vale lo stesso, dando alle divisioni metriche dell' antenna questa lunghezza, e facendovi consecutivamente scendere di una in una il telajo dell' istrumento, se ne avranno immediatamente le velocità rispettive v del volante , e per esse e la formola giá qui sopra trovata le rispettive corrispondenti V della corrente; velocità che moltiplicate rispettivamente per l' altezza di ciascuno strato, cioé nella supposta costruzione per la lunghezza del volante , se ne avranno le rispettive portate, e nel loro insieme la totale del canale. Tutta la difficoltà dunque si riduce in passare dalla conosceuza osservata di v alla calcolata di V dipendente dalla conoscenza di Qb, che per essere costante basta riconoscere come sopra cennossi via di una sola preliminare esperienza; esperienza di cui se ne dà a conoscese nelle opere citate il metodo di eseguirla , ma che il Navier impugna dice il Masetti contro ragione, e che io lascio di rapportare per brevità.

Intanto questo tachimetro conduce seco per quanto ne pensa il Navier degli inconvenienti che gli son proprj: tale sembra che debba esserne la difficoltà di stabilirlo sodamente mercè quell' antenna nella corrente , difficoltà tanto maggiore quanto più grande ne è la profondità e il movimento ; tale la supposizione che il volante mantenesse un' equabilità di moto per tutto il corso dell' operazione, equabilità che la natura stessa dell' operazione sembra che dovesse alterare. Quindi conchiudo con quanto ne dice il professore Bertini lucchese , che le date sulle quali va il calcolo di questo strumento fondato, sono molto fallaci ed incerte , onde poterne aspettare dei risultati rigorosi e fedeli.

38. L' asta ritrometrica è l'istrumento di un uso in oggi il più applaudito per le misure in questione. La teoria che l'autore ne ha dato non mira direttamente che alla determinazione della scala delle velocità dalla superficie al fondo. Ma noi vedremo qui appresso le difficoltà che questo punto di vista viene a provare nel fatto pratico.

Il primo esperimento tentato per provocare *a posteriori* la reale esistenza di questa scala fu quello del Padre Cabeo sopramenzionato, esperimento da lui rapportato nel primo libro delle sue *Meteore* date in Roma nel 1686. L' istrumento onde questo idrometra ferrarese si servì, non consisteva che in un' asta di legno, armato in piede di un certo peso, e di alcune vessichette in testa. Con una tale armatura l' asta galleggiante in acqua tranquilla con positura verticale, si vedea correre inclinata in avanti nelle acque correnti; e dimostrava così che il loro moto negli strati superiori riusciva maggiore che negli inferiori; e perciò una degradazione facea rilevare di velocità dalla superficie al fondo. Una modificazione di aste siffatte, modificazione donde l' istrumento ne è risultato il più applaudito ed esimio di quanti se ne siano proposti, sono le aste che il Cav. Bonati produsse sotto il nome già rimarcato di aste ritrometriche, le quali non ne differiscono che nelle sole vessichette di cui le ha con giudizio spogliate. In effetto questo strumento non si riduce che ad un cilindro di legno terminato in piede di tanto in metallo, quanto galleggi nell' acqua stagnante con posizion verticale, e non ne sporga al di fuori che di $0^m,6$ circa. Diamone brevemente la teoria. Si scelga un tratto dei

più regolari del fiume in esperimento; e posto in acqua l' istrumento, se nè osserverà la velocità e lo angolo d' inclinazione onde regolarmente procede: sopra di queste due date poggiando alla determinazione si viene della scala cercata delle velocità.

Nel suo procedimento l' asta non è animata che dalla forza impulsiva della corrente, dalla forza di gravità e dalla spinta dell' acqua sulla sua parte sommersa. Queste forze agendo in sistema sopra di essa tendono a farsi equilibrio, e perciò a produrvi uno stato di moto equabile e permanente ed una inclinazione costante. In questo stato la risultante del sistema sarà nulla; e nulla sarà ancora quella de' loro momenti presi dalla superficie ove l' asta si appoggia inclinandosi. Quindi la teoria di questo sistema di forze non si riduce che ad assegnarne le componenti e i loro momenti, eguagliarne rispettivamente a zero le somme, ad averne così due equazioni, e a definirne mercè di esse gli elementi della conoscenza proposta. Siano dunque u, φ la velocità e la inclinazione osservate dell' asta; siano p, l, r il peso la lunghezza della parte sommersa e la distanza dal pelo del centro di gravità di essa; sia v la velocità della corrente nello strato per l' ascissa x contata dal pelo sulla verticale, e si avrà

1° $p\cos\varphi$ per l' azione della gravità normale all' asta; epperò

$pr\cos\varphi$ pel suo momento riferito come sopra al medesimo punto di emersione dall' acqua, sopra cui tende a farla girare.

2° $-p\cos\varphi$ per la spinta dell'acqua normale all'asta ed agente nel suo punto di mezzo, e perció

$-\frac{pl\cos\varphi}{2}$ pel suo momento riferito parimenti di sopra al medesimo punto di emersione

3° $v-u$ per l'accelerazione che l' asta riceve per parte del fluido nel punto dell'ascissa x, epperò

$(v-u)\cos\varphi$ per la sua componente normale all' asta.

Quindi essendo $\frac{dx}{sen\,\varphi}$ l' elemento longitudinale dell' asta; a il suo diametro epperò $\frac{adx}{sen\,\varphi}$ l'elemento della sua sezione per lunghezza: di più essendo

$\frac{(v-v)^2 sen^2\varphi}{2g}$ l'altezza dovuta alla velocità $(v-u)\,sen\,\varphi$, sarà

$\frac{adx\,(v-u)^2\,sen\,\varphi}{2g}$ l' urto del fluido sopra di quest' elemento, il quale per essere (25.3°) l' urto di una superficie cilindrica gli $\frac{11}{20}$ di quello della sua sezione longitudinale darà

$\frac{11a}{20.2g}(v-u)^2\,sen\,\varphi\,dx$ per quello elementare dell' asta; epperò moltiplicandolo pel suo braccio di leva $\frac{x}{sen\,\varphi}$ darà

$\frac{11a}{20.2g}(v-u)^2 xdx$ pel momento corrispondente.

Intanto le velocità decrescono dalla superficie al fondo; e perció nella scala decrescente ve ne sarà una $v=u$: quindi significando con $x=\omega$ l' ascissa che

16

vi corrisponde, sarà per tutti gli strati ad essa superiori $v > u$, epperò $v - u$ positiva, cioè acceleratrice: e $v < u$ per tutti quelli inferiori; epperò $v - u$ negativa, cioè ritardatrice. Onde supponendo $= 1$ la gravità specifica dell' acqua, si avrà

$\frac{11a}{40g}\int_0^{\omega}(v-u)^2 sen\varphi\, dx$ per l'espressione dell' urto dell' asta da $x=0$ ad $x=\omega$

$-\frac{11a}{40g}\int_{\omega}^{\omega'}(v-u)^2 sen\varphi\, dx$ per quella di essa da $x=\omega$ ad $x=\omega'(=l sen\varphi)$ epperò

$\frac{11a}{40g}\int_0^{\omega}(v-u)^2 x dx$, $-\frac{11a}{40g}\int_{\omega}^{\omega'}(v-u)^2 x dx$ per quelle de' loro momenti. Dunque raccogliendo da queste considerazioni; sommando rispettivamente fra loro quelle forze e questi momenti, si avranno per essere $p=\frac{\pi a^2 l}{4}$ le due equazioni finali che risolvono il problema sotto l' espressione

$$\int_0^{\omega}(v-u)^2 dx - \int_{\omega}^{\omega'}(u-v)^2 dx = 0$$

$$\frac{11}{5\pi r l y}\left(\int_0^{\omega}(v-u)^2 x dx - \int_{\omega}^{\omega'}(u-v)^2 x dx\right) + (2r-l)\cos\varphi = 0$$

Ridotta così la questione ad uno stato meramente analitico, non rimane per venirne alla conclusione che di risolvere queste equazioni, le quali daranno v in funzione di u, φ date dalle osservazioni. Ma la difficoltà di avvin-

colare dal segno integrale queste due quantità senza che prima si venisse a conoscere v in funzione di u, conoscenza essa stessa trascendente, ha fatto che si fosse deviato dal retto cammino della soluzione, e ad uno tutto indiretto si fosse venuto, quello dico di prendere come data e ipoteticamente questa funzione; e quindi procedere alla maniera di soddisfarvi. L'illustre autore della teoria di cui si tratta, pella considerazione che v diminuisce come x aumenta, e che le ordinate e le ascisse della famiglia delle curve paraboliche sieguono questa legge, fu portato io credo a supporre la scala delle cercate velocità come potere appartenere a questa famiglia; epperò ad assumerne l' equazione $u=C-Ax^n$ che la rappresenta in generale, per quella funzione; ed a combinarla in modo colle due equazioni fondamentali, onde determinarvi le costanti arbitrarie A, n sotto la condizione che dessero per u, φ i valori già supposti conosciuti per osservazione. Questo processo però bisogna qui ricordarlo, domanda un calcolo sì laborioso e prolisso dice il Venturoli, che spaventa; verità di cui potrà farsi convinto, gettando lo sguardo sulla memoria del Bonati. L' uso dunque di questo tachimetro idraulico riuscendo per cosiddire inaccessibile per questa strada nella pratica applicazione, fece pensare allo stesso Venturoli di sostituire a quella curva una linea spezzata avente per ordinata iniziale la velocità superficiale $v=C$; la velocità $v=u$ dell' asta per quella dell' angolo di spezzatura a cui corrisponde la ascissa $x=\omega$; e la velocità $v<u$ per quella da $x=\omega$ ad $x=\omega'$. Quindi significando con α, β i parametri delle due branche di cotesta linea, avremo per la sua

rappresentanza analitica il sistema delle due equazioni

$$v = C - \alpha x \text{ epperò } u = C - \alpha \omega \, ; \; v = u - \beta \, (x - \omega)$$

equazioni che combinate colle fondamentali, porteranno alla determinazione di α, β in funzione di u, φ. Infatti sostituendo in quelle equazioni i valori di

$$v - u = \alpha \, (\omega - x), \; u - v = \beta \, (x - \omega)$$

ed integrando fra i rispettivi limiti, se ne avrà dopo le convenienti riduzioni

$$\alpha = \frac{11 \, (C - u)^3 \, tan \, \varphi}{10.2 a g \pi \, (2r - l)}$$

$$\beta = \alpha \left(\frac{10.2 a g \pi \, (2r - l) \cos \varphi}{11 \, l \, (C - u)^2 \, sen^2 \varphi - 10.2 a g \pi \, (2r - l) \cos \varphi} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Questi valori sostituiti nel sistema delle due equazioni della supposta linea, daranno la rappresentanza analitica della cercata scala delle velocità.

Il caso più semplice di questa ipotesi è quello di $\alpha = \beta$; caso in cui le due equazioni del sistema che la rappresenta analiticamente divengono identiche; epperò danno a dividere che la supposta linea non è che una sola ed unica retta. In questo caso dunque la rappresentanza analitica della cercata scala si ridurrà all' equazione

$$v = C - \alpha x \text{ ovvero } v - u = \alpha \, (\omega - x)$$

che sostituendola in dette due equazioni fondamentali, ed integrando fra i dati limiti, oppure facendo tutto di seguito $\alpha = \beta$ nei loro valori generali, ne risulterà

$$\omega = \frac{l \operatorname{sen} \varphi}{2} \text{ epperò } v = u \text{ per } x = \frac{l \operatorname{sen} \varphi}{2}$$

risultato che dimostra essere la velocità dell' asta eguale alla media fra tutte le velocità della verticale; e che corrisponde al punto di mezzo di essa. Per averne dunque quest' ultima basterà osservarne soltanto quella onde l' asta procede equabilmente. In conseguenza dunque di questa teoria potremo conchiudere col medesimo Bonati, che quando non si tratta propriamente della ricerca della scala, ma della velocità media, epperò della portata semplicemente della verticale, e punto non si cura di assegnarla al rigore, cosa per altro superflua in molti casi, allora potrà attenersi a quest' ultima ipotesi, cioè che la scala cercata fosse una linea retta; ipotesi secondo lui che condurrà a risultati moltoppiù soddisfacenti di quello potrebbe aspettarsi da qualunque altro metodo sperimentale che sia stato finoggi proposto. Ma queste conchiusioni cui la teoria ci ha condotta sono esse mai sanzionate dal fatto? ecco una questione che lo stesso Venturoli i di cui travagli concernenti ce ne fanno riguardare come autore anchesso, non ha saputo per quanto egli ne dice, risolvere e definire. Il Masetti nella memoria citata un riscontro ne rapporta con una accuratissima esperienza dalla scuola idraulica di Ferrara eseguita sul Po nel 1820; riscontro in cui una discrepanza tale si trova, che lo angolo di declinazione φ osservato di 15°, non è dato dalla teoria per l' ipotesi della scala *una linea retta* che di 1° 48' 32" circa; nel mentre che per la scala *una linea spezzata*, quando l' asta e perciò la profondità non arrivava a cinque metri, non ne era

trovata l' ascissa $x\,(=\omega)$ per l' angolo di spezzatura che di venti metri circa; discrepanza che porta tutto di seguito a conchiuderne la negativa dell' una e la altra ipotesi nel caso in questione. La conciliazione di una sì marcata discordanza ha molto tormentato non solo questo distinto idraulico, ma ancora l' istesso Venturoli che ne venne dal medesimo interrogato, il quale nella sua risposta del giugno 1821 dopo la considerazione di alcune difficoltà riguardanti l' assunto si espresse dicendo che in pratica il partito che si può trarre da questa specie di galleggiante si riduce a prendere la velocità dell' asta per la media della verticale in cui viaggia; che questo partito quantunque non esatto quando l' inclinazione dell' asta è notabile, frattanto può sempre considerarsi come portante ad una approssimazione sufficiente alla pratica ; e che i di lui e i tentativi del Bonati per indurre da detta inclinazione la scala della velocità, sono specolazioni belle e buone in teoria , ma che teme in pratica un gran costrutto non potesse aspettarsene.

Intanto non bisogna precipitarne il giudizio definitivo : bisogna moltiplicarne i riscontri col fatto di nuove e sempre accurate esperienze; confrontarne diligentemente i risultati, studiarvi il modo onde poterli raccordare; e quindi con maggiore sodezza e maturità pronunciare sul merito pratico della teoria sì elegante che dimostrata dell' istrumento in discorso , cotanto applaudito e commendato.

39. Non mi sembra fuori proposito il mettere qui brevemente in discussione alcune difficoltà , che nell' uso sperimentale di questo strumento si fanno sentire.

1° Il metodo di applicazione dato dal suo autore prescrive per l' esperimento la scelta di un tratto molto regolare del fiume, e lungo 200 o più tese, sebbene in un' altra memoria dopo più matura considerazione ei dice, di potersi ristringere sino a tese 60; scelta utile e giudiziosa onde le acque vi scorrano equabilmente; il procedimento dell' asta vi si possa con aggiatezza ispezionare, e la velocità e la inclinazione con accuratezza definire. Ma questa scelta facile e pronta ne' canali artificiali riesce di somma difficoltà in quelli naturali, ove i tratti anche i meno irregolari portano nella sezione delle ineguaglianze frequenti e talmente sensibili, che sono capaci a conturbare non una sola ma replicate volte la regolare velocità del moto progressivo. Questa difficoltà però è stata prevenuta dal Bonati medesimo; assicurando egli la grande ubbidienza di questa specie di galleggiante all'impressione delle acque, tanto che viene in gran parte a compensarvi gli effetti di quella inegualtà, e sostenendo inoltre colla teoria e coll' esperienza non esserne l' errore risultante, che tenue e di poco momento. Oltre ciò essa non è inevitabile: la lunghezza del tratto da cui maggiormente dipende, non è condizionata nella quantità, che ne è in certa maniera arbitraria, facendosi dalla natura del fiume dipendere e dall' indole delle irregolarità del canale. Infatti nelle ricerche citate fatte nel 1820 sul Po non fu presa che di 100 metri, nel mentre che sul Tevere in quelle del 1821 non lo fu che di metri 60.

2° I galleggianti da qualunque punto partono della sezione vanno sempre a finire nelle vie del fi-

lone il loro movimento. Questo inconveniente che renderebbe questa specie di tachimetro di un uso limitato e particolare, non ha presa sensibile sopra di esso, non essendo sì sollecito a deviare dal suo primo cammino. Infatti dopo alcuni bilanciamenti allorchè posto in acqua, non durevoli per più di 20 tese esso procede sensibilmente con moto uniforme e regolare parallelamente] alla riva; non devia per ordinario dal suo incominciato viaggio prima del limite inferiore che suole designarsi pel tratto dell' esperimento; e non declina definitivamente verso il mezzo che per delle grandi irregolarità dell' alveo, ed inegualtà di moto nel fluido, non supposte nel tronco in osservazione.

3° Una difficoltà già sopra rimarcata, si presenta principalmente nell' uso pratico di questo strumento a riguardo della giusta misura dell' angolo d' inclinazione dell' asta; difficoltà che lo rende imperfetto dovendo contentarci di una stima così all' ingrosso e per approssimazione; difficoltá che forma un argomento onde il Venturoli dubita che possa prevenire in parte la testè notata discrepanza tra la teoria ed il fatto; difficoltà in fine che cresce come da' canali navigabili si passa a' non navigabili, inquanto in quelli l' osservazione se ne puó eseguire in barca, e perciò avvicinandosi all' asta; mentre in questi dovrà da lontano, e dalla ripa osservarsi. A questo proposito per ovviarvi al maggior grado possibile, il sig. Poletti di Modena ha fino del 1828 proposto negli opuscoli scientifici di Bologna, una utile ed ingegnosa risorsa. È già costume d' inverniciare le aste onde non imbeversi di umido: quindi potrà ciò farsi in bianca

vernice; e tracciare sulla parte fuor acqua di esse, delle orizzontali circonferenze egualmente distanti l'una dall' altra di un centimetro circa, o meglio di quanto più confacente crederassi alla loro grossezza; colorarle gradatamente co' quattro colori forti dell' iride, rosso azzurro giallo verde, onde potersi l' una dall' altra distinguersi da lontano, e ripeterle se il bisogno il richiede: ciò fatto l' osservatore che ne discernerà facilmente da lontano la disposizione, ne noterà i due punti bagnati anteriore e posteriore dell' asta che inclinata viaggia, e contandovi il numero delle circonferenze intermedie ne rileverà la distanza; distanza che detta d, ed ω il raggio dell' asta, condurrà mercè la formoletta $tan\,\varphi = \frac{d}{2a}$, a conchiudersene l' angolo cercato φ dell' inclinazione: ma quest' angolo è supposto costante e permanente per l' intero corso dell' asta; e vi ha de' dubbj che ciò non possa verificarsi nel fatto: tanto che il sempre sagace e penetrante Venturoli sospetta in questa supposizione un secondo *perché* donde quella discrepanza possa provenire.

4.° Una quarta difficoltà finalmente può farsi sentire in questo metodo. La teoria ond' esso poggia non si fonda che sulla legge newtoniana dell' urto obbliquo dei fluidi, quella del quadrato del seno dell' angolo d' incidenza; legge che non si trova sensibilmente esatta coll' osservazione che da 60° gradi in sopra, molto aberrando al di sotto di questo limite. Quando l' asta viaggerà dunque con una inclinazione $\varphi < 60°$, allora la teoria che se ne è data non

avrá punto luogo. Intanto per non istringere la generalità del metodo si è pensato di prevenirvi un cosiffatto inconveniente nella fondamentale costruzione delle aste; costruzione mercè la quale senza moltiplicarsene il numero, se ne potesse in un medesimo esperimento modificare all' occasione il calibramento, variarsene e ridursene piú basso e più distante dal loro punto di mezzo il centro di gravità; e perciò far che procedessero più erette e meno inclinate.

40. Tali sono le nostre principali conoscenze sugli strumenti idrometrici. Dalla precedente e rapida esposizione si raccoglie senza difficoltà, che l' oggetto immediato della loro applicazione non è l' averne di primo lancio la velocità proposta; ma di cercarla moltiplicandone le operazioni e ragguagliarne i risultati speciali che se ne ottengono. Il galleggiante semplice, ed il composto sotto la costruzione delle aste ritrometriche sono i due fra tutti, che presentano alla pratica un metodo di applicazione il più facile il più generale e spedito; e che meritano perciò nell' uso pratico una preferenza decisa, quando delle circostanze assai singolari non verranno a rigettarneli. Restandoci adunque a parlare del metodo di operazione sistematica dell' idrometria sperimentale, noi ci atteniamo a questi due galleggianti. Faremo vedere nel primo l' utile uso delle due citate (15) formole empiriche prodotte dietro a delle moltiplici ed accurate esperienze dai sommi idraulici Dubuat e Prony; e mostreremo nel secondo l' unico metodo sperimentale per servirmi delle frasi della scuola idraulica degl' ingegnieri Pontificj, *assolutamente il più spedito e il più facile che possa usarsi nei gran fiumi*, *e for-*

se il solo praticabile ne' fiumi pieni e grandissimi. Incominciamo dunque dal primo fondato sull'uso del galleggiante semplice.

41. La velocità media quantunque non immaginata che in astratto, e non ammessa che per sola ipotesi, non lascia di avere un' esistenza fisica in un certo punto della sezione. Quindi gli idrometri venendo nel bisogno di conoscerla, a cercarla si diedero e a sorprenderla sul fatto. Diverse strade essi vi tentarono. Il cav. Dubuat supponendola nella verticale passante pel filone, supposizione che la pratica fa buona senza gravi anomalie, si diede a rintracciarne la relazione colla velocità superficiale e colla rasente il fondo. A tale oggetto misurando direttamente per via dell' esperimento la portata che divisa per l' area della sezione gliene dava la media corrispondente; osservando col galleggiante del Castelli quella del filone; ed esplorandone infine la rasente il fondo coll' uso di globetti un poco più pesanti dell' acqua e scorrenti lunghesso, ammassó una serie di esperienze dal di cui andamento, dette V, v, u le tre velocità in questione, ne conchiuse le due relazioni, in cui c significa una celerità costante $= 0^m, 02707 = 1^{\text{poll.}}$

$$V = \frac{v+u}{2}$$

$u = (\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, ovvero preso il metro per unità

$$u = (\sqrt{v} - o,\ 1645)^2$$

relazioni il di cui accordo coll' esperienza dice egli stesso, è sì sorprendente che si verificano non

solo negli alvei regolari come sarebbero i circolari, ma ancora sensibilmente in quelli ove la larghezza vi è 6 in 7 volte maggiore della profondità. Altri idrometri vi hanno un altro cammino seguito. Prendendo di proposito una sezione del canale in considerazione, e sottomettendola con metodo all' esperimento, si diedero a definirvi mercè l' uso di un qualche tachimetro per un certo sistema di punti di essa un sistema di velocità speciali, che sottomesse ad esame e studiandole procurarono cercarvi e definirne la media: e ripetendo e moltiplicando con accuratezza cosiffatti esperimenti e ravvicinandoli, si occuparono in rilevarne il procedimento, in iscoprirne la legge dominatrice, onde poterne far uso in generale, anche nei casi non sperimentati. A questo fine furono dirette le serie di esperienze che il Michelotti ne' suoi *sperimenti idraulici*, e il Ximenes nelle sue *esperienze idrauliche* ci hanno lasciato. Intanto il Prony portando alla sanzione del fatto sperimentale le formole date empiricamente dal Dubuat, ve le ha trovato non soddisfacenti che fra certi limiti; fuori dei quali in contraddizione ve le trovava, dando alle volte per risultato la velocità rasente il fondo maggiore della superficiale, ed effettiva la velocità media mentre che la superficiale era $=0$. Quindi unendo al ragionamento l' esperienza si fece di proposito altra più soddisfacente a sostituirvene: e segnando con α, β due costanti, invece dell' equazione

$V = \frac{2\sqrt{v}(\sqrt{v}-\sqrt{c})+c}{2}$ onde rappresentare secondo il

Dubuat la relazione tra la velocità superficiale e me-

dia, ne assunse la indeterminata $V=\frac{v(v+\alpha)}{v+\beta}$; cioè la $\frac{v}{v-V}=\frac{\beta+v}{\beta-\alpha}$; o fatto $\frac{v}{v-V}=y$, $\frac{\beta}{\beta-\alpha}=a'$, $\frac{1}{\beta-\alpha}=a''$, la $y=a'+a''v$: e quindi col metodo da noi richiamato (15) e da lui esposto all' artic. 156 delle sue citate *Ricerche*, venne determinandovi le due costanti arbitrarie $a'=4,036$; $a''=1,280$; epperò $\alpha=2,37187$; $\beta=3,15312$ e perciò a conchiuderne l' equazione

$$V=\frac{v(v+2,37187)}{v+3,15312}$$

per rappresentarne con più giustezza quella relazione; equazione che portata essa pure al confronto ripetitamente di avverate esperienze, lo condusse a conchiuderne che nei casi ordinarj della pratica, casi ne'quali la velocità superficiale mai eccede i tre metri a secondo, potrà ristringersi alla espressione più semplice

$$V=v.\ 0,816458;\ \text{cioè}\ V=\frac{4v}{5}\ \text{prossimamente}$$

Questa approssimazione de' $\frac{4}{5}$ sebbene fosse minore di quella cui la precedente trovata equazione conduce; non lascia di portare a dei risultati sempre più approssimati di quelli se ne potrebbero sperare dalla formola del Dubuat.

Le formole trovate vanno indipendenti dalle dimensioni della sezione; epperò potendo applicarsi agli alvei di qualunque forma e grandezza, riuscirebbero della massima utilità, se de' forti dubbj non in-

sorgessero sulla certezza de' loro risultati, quando dalle picciole correnti per le quali sono state trovate, si passasse al caso de' gran canali specialmente in piena. Per usarne dunque in generale con sicurezza bisognerebbe che fossero sempre più verificate con delle prove ulteriori sopra canali di variata grandezza e di circostanze diverse. Ma vediamo intanto l' utile servigio che possono rendere alle operazioni del galleggiante semplice; e il metodo combinato che ne risulta.

Scelto un tratto del canale conveniente per l'esperimento, vi si metta in acqua il galleggiante tanto al di sopra della sua sezione superiore quanto basti, onde pervenuto in essa vi si trovi già ridotto sulla linea del filone, e con averne acquistata la medesima velocità. Quindi con un cronometro notando il numero dei secondi del suo viaggio dalla prima alla seconda sezione, e dividendone la lunghezza data in piedi o in metri, se ne avrà la velocità media del filone; velocità che sostituita in quelle formole ne daranno la media del velamento verticale di esso. Ripetendo questa operazione per diverse fiate; prendendo il medio di tutti i risultati; ed assumendo cotesto medio per la velocità della sezione media del tratto, se ne avrà moltiplicandola per la sua area già supposta conosciuta, la portata media del canale nelle adiacenze di esso.

La somma speditezza e semplicità di questo metodo ne rendono molto utile l' uso specialmente nei casi di correnti brusche ed assai alterate. Quindi giova prevenirvi alcune difficoltà, ed aggiungere

qualche riflessione propria ad assicurarlo e promoverlo.

1° Si è supposta la velocità media del filone per la media della sezione del tratto in esperimento: questa supposizione già permessa e legittima ne' canali regolari e simmetrici, forma una condizione che di rado viene a soddisfarsi nel caso di correnti naturali; e perciò resta il dubbio se in cotesto caso e in generale fosse, non dico legittima, ma permessa a conseguirne de' risultati non rifiutabili. A questo proposito dunque giova riflettere che in un cosiffatto genere di ricerche non si va dietro che a delle approssimazioni soltanto grossolane; e ad altro non si attende che ad evitare le gravi anomalie, quelle cioè che conducendo a delle conchiusioni contrarie al fatto, attraverserebbero il fine dell' esperimento; anomalie per altro quand' anche avessero luogo, difficilmente sfugirebbero alla penetrazione di un esperto e sagace osservatore.

2.° Le formole dalle quali il metodo in discorso dipende, si è già qui sopra marcato, che non sono state trovate se non per via di esperienze sopra piccole correnti eseguite; epperò il loro uso naturalmente portante all' incertezza se potessero aver luogo in generale. Questo dubbio nel mentre che non potrebbe cadere, riflette opportunamente il Venturoli, che sull'applicazione del metodo al caso delle ampie sezioni de' fiumi gonfj, epperò che diviene tanto più di peso nel fatto de' risultati, quanto più grandi sono le sezioni, maggiori le piene, e maggiore ancora il bisogno di ricorrervi, non potrà con assicuranza risolversi finché non saranno esse abbastanza verificate. Intanto sembra cosa utile il richiamare in questo luogo, quanto il Ca-

valieri e il Dupin nelle opere in fine della prima parte citate, asseriscono a questo riguardo. Il primo dirigendosi col discorso alla formola data in correzione dal Prony a quella del Dubuat, ce la propone quale punto di appoggio del processo più semplice, meno ipotetico ne' principj, meno incerto ne' risultati, e il più che conviene seguire per arrivare al fine proposto nelle opere di arte, come sarebbe por esempio nella determinazione della giusta luce de' ponti: e il secondo nell' atto che ci assicura esserne l' approssimazione dei $\frac{4}{5}$ assai comoda in pratica e soddisfacente in tutti i casi, consiglia ed insinua alle persone addette a' lavori d' industria, di adottarla ed usarne ne' giudizj che formar dovranno sulla forza delle correnti, di cui avranno a disporre.

3.° Non sembra fuori proposito aggiungere che se non ostante le di sopra considerazioni dar si volesse assai di peso al dubbio in questione, il metodo purnondimeno non lascerebbe di essere in generale della maggiore utilità: in primo luogo per la sua semplicità la sua prontezza e facilità, non mancando ad un abile osservatore di scoprire a traverso della spessa caligine dell' incertezza le grandi aberrazioni de' risultati, di tenerne conto nelle conchiusioni, di saperne gli effetti corregere, e modificarle corrispondentemente al suo fine: in secondo luogo potendo sempre essere di una utile risorsa in tutti quei casi in cui gli altri metodi incontrano delle difficoltà insuperabili; in quei casi cioé disperati e ribelli a qualunque altro trattamento: in terzo luogo finalmente potendo servire di punto di appoggio all' idrometra onde i suoi concetti appoggiarvi; le sue

congetture formare sulla natura del caso; e quindi ad un partito utile e prudenziale appigliarsi, in prevenire un qualche disagio, una qualche opera importante in promovere, in soddisfare a un qualche suo impegno.

Ma passiamo al secondo metodo proposto, a quello delle aste ritrometriche.

42. La velocità delle acque correnti per gli alvei come decresce dalla superficie al fondo, così dal filone alle ripe. Quindi oltre di una scala secondo la verticale di cui si è fatto parola, un' altra secondo la trasversale ve ne ha, che nella giusta stima della velocità media bisogna pure mettere a calcolo, e che gl' idrometri trasandati hanno poco considerato. Il problema dunque della scala cioè della variazione della velocità, preso in tutta la sua estensione e guardato con occhio geometrico, non ha per oggetto una semplice curva, ma una superficie che dalle intersezioni risulta delle consecutive scale verticali per larghezza colle corrispondenti orizzontali consecutive per altezza. In istretto senso perciò e matematicamente non sarebbe un problema di geometria a due ma a tre dimensioni; problema trascendente e superiore, per la di cui soluzione mancherebbero i mezzi e le risorse necessarie. Ma il nostro assunto non è sì specolativo ed astratto: è tutto sperimentale. Non si tratta che di camminare dietro all' osservazione ed all' esperienza, uso facendo di qualche idoneo strumento. Il metodo che il primo si presenta a questo punto di vista, sarebbe quello in generale d' istituire un sistema di misure per diversi

punti di una stessa verticale, ripetere quest' operazione sopra un sistema di verticali secondo la larghezza della sezione; e quindi prendere la media fra le medie di tutte le stazioni, ed averne la media cercata della sezione. Ma questo solo non sarebbe bastante: i bisogni dell' impresa non si limitano ordinariamente nella pratica alla considerazione del canale in un solo punto del suo asse, ma si estendono a quella ancora delle sue adiacenze, delle quali fa d' uopo conoscere la velocità media. Quindi per conseguirla conviene ripetere l' istessa operazione per diverse sezioni lungo dell' asse; più o meno strette a seconda del grado di approssimazione di cui si abbisogna; e quindi prendere fra le medie di tutte le sezioni quella media, per rappresentarne la cercata dell' intero tratto in considerazione. Questo processo però si vede bene che dovrà riuscire sì laborioso e prolungato, da poter scoraggiare un osservatore il più sofferente, e da stancare non dico quando si tratta correnti gonfie ed in piena, ma placide ancora e tranquille. Il metodo delle aste ritrometriche sembra di andare esente da cotesta inconvenienza. Oltre la predicata sua utilità sopra qualunque altro, esso attesa la generalità delle sue applicazioni ad ogni sorta di canali di grande estensione o no, e a tutti gli stati di un corso permanente eziandio di rapide e furiose correnti, gode il vantaggio di operare il fatto dell' esperimento in modo prontissimo e semplice, in tempo breve ed approssimativamente. L' uso di un metodo siffatto e sì applaudito merita secondo l' idea della scuola idraulica citata, di essere sempre più promosso combendato e stabilito. Conchiudendo adun-

que questa seconda parte del mio assunto, e con essa l'intero scritto, mi sembra cosa giovevole descriverne a minuto il processo; mostrarne in dettaglio tutto l'andamento; ed esemplificarne alla convenienza le diverse parti con una delle prove da quella scuola eseguite nel 1821 sulle acque del Tevere tra Ponte Molle e il loro ingresso in Roma.

Il primo passo, il passo preliminare della proposta operazione si è la scelta di un tratto di canale il più dritto e regolare che il caso presenta. Il Bonati lo ha disegnato come sopra notossi, da 200 a 60 tese di lunghezza. Ma il sig. Cozzi direttore della prova da noi presa a citare, e che molto si era secolui esercitato nella pratica del metodo, condotto dalle circostanze locali non lo prese in questo caso che di soli metri 60.

Fissato così il tratto dell'esperimento se ne misurino le due estreme sezioni. Il metodo ordinario di eseguirlo non si riduce che a farne traversare l'acqua viva da un forte canapo diviso in parti metriche, e scandagliarne il fondo pe' diversi punti di divisione. Formato così il disegno della sezione con maggiore o minore approssimazione secondo il maggiore o minor numero delle divisioni, approssimazione che potrebbe sempre più serrarsi mercè l'interpolazione, se ne troverà con alcuno de' metodi conosciuti la superficie. Quando la larghezza della sezione permette questa operazione, di stendere cioè il canapo divisato, allora un ottimo partito sarebbe quello di giovarsi del noto metodo di Tommaso Simpson che M. Leveque nell'esame marittimo di Juan, e Prony nella sua architettura idraulica rapportano combendando; me-

todo conducente ad una formola che detta S la superficie cercata, α la quantità di ciascuna delle parti metriche del canapo, supposte per preparazione in numero pari, epperò i punti in cui esso va diviso in numero impari n $(=2r+1)$; ed y_n le profondità corrispondentemente rilevate via dello scandaglio, che figurano come se ordinate della sezione, noi mettiamo sotto l' espressione simbolica

$$S=\frac{\alpha}{3}\left(y_1+4\sum_{1}^{r+1}y_{2r}+2\sum_{2}^{r+1}y_{2r-1}+y_{2r+1}\right)$$

Questa formola non può applicarsi però alle date della prova in considerazione, nella quale il processo meno geometrico e regolare, è stato dall' ingegniere esecutore combinato nel suo piano di operazione col fatto fisico dell' esperimento. In effetto considerando l' ampiezza superficiale delle due sezioni come rispettivamente divisa nei punti di passaggio delle aste, se ne scandagliarono le corrispondenti profondità, le quali prese per ordinate venivano a rappresentarle come divise in tanti quadrilateri meno uno quanto il numero di quei punti. Quindi prendendo fra le ordinate dell' una e le corrispondenti dell' altra sezione le medie, si considerarono come ordinate della sezione media dell' intero tratto, ordinate che la faceano come divisa in un egual numero di quadrilateri: assumendo in seguito per altezze di questi quadrilateri le ordinate medie fra le due contigue che ne significavano i rispettivi lati; per basi le medie di quelle corrispondenti de' quadrilateri estremi; e in fine mol-

tiplicando ciascuna base per ciascuna altezza corrispondente, se ne definirono le aree particolari rispettive, che sommate insieme quella ne diedero della sezione media del tratto. Tale fu il processo di quella prova per quanto ne riguarda la parte geometrica; processo che volendo rappresentarsi similmente di sopra con una formola simbolica, basta significare con

y_n, z_n le ordinate corrispondenti delle due sezioni estreme

β_n, β'_n, le basi rispettive dei quadrilateri di esse

e sene avrà

$\frac{1}{2}(y_n + z_n)$ per le ordinate della sezione media

$\frac{1}{2}(\beta_n + \beta'_n)$ per le basi superiori corrispondenti dei quadrilateri di essa

$\frac{1}{2.2}(y_n + z_n + y_{n+1} + z_{n+1})$ per le altezze verticali di questi quadrilateri epperò $\frac{1}{2.4}(\beta_n + \beta'_n)(y_n + z_n + y_{n+1} + z_{n+1})$ per le loro rispettive superficie; e finalmente se ne avrà

$S = \frac{1}{2.4} \sum_{1}^{n} (\beta_n + \beta'_n)(y_n + z_n + y_{n+1} + z_{n+1})$ per quella cercata della sezione media.

Con questo processo da noi condotto con maniere simboliche e che l' ingegniere relatore sig. Beretti ha esposto nelle *Ricerche* della scuola per l' anno 1821 (pag. 57), fu trovata l' ampiezza delle due sezioni estreme di metri 70, 39 e 77, 64; e di metri quadrati 218, 779 la superficie della sezione media.

Designato e riconosciuto il tratto della prova, uopo è esplorarne il fondo onde prepararvi convenientemente le aste. Se la natura del canale lo comporta, potrà passeggiarsi in barchetta, scorrendo del-

le linee presso che parallele alle sponde; prendendovi de' frequenti scandagli; e così assicurandosi della qualità del fondo, definirsi delle aste le lunghezze convenienti, onde non dare in dei dossi che potrebbero incontrarvisi, e calibrarsi onde procedervi colla necessaria erettezza. Se l' uso delle barche non potrà avervi punto luogo, allora non mancheranno ad un sagace operatore risorse per ottenerne il medesimo fine. Nel caso affermativo cadde il fatto della prova presa in esempio: e perciò il metodo di giovarsi delle barchette, quello onde le aste vi furono regolate. Dodici furono le esperienze nelle quali vennero poste alla prova in dodici punti diversi secondo la larghezza: varia ne fu la lunghezza a seconda della rispettiva profondità corrispondente alle linee del loro viaggio; lunghezza che andando da sinistra a destra variò da metri 1, 71 a metri 4, 21: la stessa ne fu infine la maniera onde vi furono preparate nelle diverse esperienze; maniera che ad altro non si ridusse che a tener preparati varj cilindri e diversi di pioppo di 4 decimetri di raggio; inverniciati per sottrarli all' umidità; in parte vuoti per potersi innestare l' uno coll' altro; uno fra essi da servire per pezzo di testa, portante un' ancoretta di quattro fili di ferro, onde passando per di sotto del cordoncino a bella posta steso a traverso della sezione inferiore, vi s' inviluppassero, vi si fermassero e venissero raccolte; ed uno da servire per pezzo di piede, terminante in un tubo di latta, onde al bisogno potervisi dei piombini riporre, e così renderle più o meno gravi affondate ed erette. Fatte queste preliminari preparazioni si verrà al fatto dell' operazione.

Tre soli operatori basteranno a conchiuderla: l' uno posto in barchetta metterà in acqua le aste alquanto al di sopra della prima sezione, e il punto di passaggio per essa ne noterá: un secondo del pari, in barchetta oppure in sulla ripa, l' angolo d' inclinazione (39, 3°) ne misurerà, e il passaggio ne aspetterà per la seconda sezione, oppure per una qualche curvatura ad essa inferiore della ripa, alla quale il filone accostandosi alla finfine le condurrà per raccoglierle: un terzo finalmente da terra ne osserverà con un cronometro il tempo in secondi del loro rispettivo cammino; tempo pel quale dividendone la lunghezza corrispondente darà le velocità medie rispettive, e per esse ragguagliandole la media dell'intero tratto e la portata.

Con tali vedute procedettero in effetto gli operatori dell' esperimento sul Tevere in considerazione. Le aste vi furono poste in acqua l' una dopo l' altra superiormente alla prima sezione; e tutto chè il Bonati ne avesse designato la quantità di 15 a 20 tese circa, onde pervenirvi con moto progressivo ed uniforme, con positura permanente e costante, non ve lo furono che di 6 metri circa, prendendo però per ottenerne il medesimo fine la prudente misura d' immergervele passo passo, e spingendole obbliquamente contr' acqua.

Mentre il primo operatore eseguiva questa operazione ed il punto di passaggio ne notava pel Canape in parti metriche, già steso seriamente a traverso della sezione, il secondo si diede a seguirne dalla ripa il viaggio, e a misurarne il tempo in secondi. Le aste tutte erette vi procedettero e con po-

situra verticale o poco inclinata in avanti, circostanza che la difficile operazione risparmiò della misura dell' angolo d' inclinazione, da cui dipende in generale il calcolo della velocità: e quindi potendosi assumere in questo caso questa velocità per quell' istessa dell' asta, ne venne che per averla bastasse il dividere la lunghezza della traccia pel tempo in secondi impiegato a percorrerla: questa operazione potrà in continuazione di sopra rappresentarsi con una formola simbolica. In effetto segnate con M_n le traccie delle n aste che corsero; con T_n il tempo corrispondente da ciascuna impiegato, ne sarà $(M_n : T_n)$ la velocitá media rispettiva; epperò:

$\frac{1}{2}\left[\frac{M_n}{T_n}+\frac{M_{n+1}}{T_{n+1}}\right]$ la ragguagliata fra due traccie contigue: e quindi

$\frac{1}{2(n-1)}\sum_1^n\left[\frac{M_n}{T_n}+\frac{M_{n+1}}{T_{n+1}}\right]$ quella dell' intero tratto, che moltiplicata per la sezione media darà la portata media

$$p=\frac{1}{2.8(n-1)}\sum_1^n\left[\frac{M_n}{T_n}+\frac{M_{n+1}}{T_{n+1}}\right].\sum_1^n(\beta_n+\beta'_n)(y_n+z_n+y_{n+1}+z_{n+1})$$

Tale è la rappresentanza simbolica del processo generale dell' operazione. Alquanto diverso ne fu peró quello che si tenne in conchiusione dalla scuola. I suoi operatori moltiplicando la velocità ragguagliata tra due traccie contigue per la frazione corrispondente dell' area della sezione media del tratto, ne assegnarono la portata particolare, che posta similmente sotto espressione simbolica si presenta sotto l' aspetto

$$p=\frac{1}{2.8}\left[\frac{M_n}{T_n}+\frac{M_{n+1}}{T_{n+1}}\right](\beta_n+\beta'_n)(y_n+z_n+y_{n+1}+z_{n+1})$$

e che porta per quella totale del tratto dell' esperimento alla

$$P=\frac{1}{2.8}\sum_{1}^{n}\left[\frac{M_n}{T_n}+\frac{M_{n+1}}{T_{n+1}}\right](\beta_n+\beta'_n)(y_n+z_n+y_{n+1}+z_{n+1})$$

portata che dividendola per l' intera area della sezione portò loro ad averne la velocitá media del tratto.

Con questo modo di procedere e colle date dell' osservazione nel volume delle *Ricerche* citate, date che qui non si rapportano perchè superfluo all' assunto, fu trovato che le acque del tronco del Tevere in osservazione, mantenendosi per l' intera operazione costantemente all' altezza di metri 0,73 sul pelo della massima magra, davano per la sua sezione media di metri quadrati 218,779 una portata di metri cubi 244,0554 a secondo, nel mentre che correvano con una velocitá media di metri 1,115.

43. Mettendo termine a questo processo e con esso alla seconda parte della memoria ed alla memoria tutta, conchiudo che la formola di Eytelwein è la conoscenza più utile e marcata, la più soda e più sicura che abbiamo sul problema della portata dei fiumi: il metodo delle aste ritrometriche, metodo il più generale spedito approssimato, quello che non ostante le inconvenienze di cui non va esente, il più che si applaudisce fra tutti i conosciuti, che il più si commenda sulla sua soluzione pratico-sperimentale.

FINE



INDICE

ERRORI			CORREZIONI
pag.	lin.		
8	28	la strada	la strada i geometri
11	25	il Venturoli, proferito	il Venturoli proferito,
12	5	pel moto	sul moto
25	24	$v'' = \Phi_y'', v''' = \Phi_z'''$.	$v'' = \Phi'_y, v''' = \Phi'_z$
42	16	$\Phi' z$	Φ'_z
45	30	$+\sqrt{-1}$	$\pm\sqrt{-1}$
52	1	presa	prese
60	11	$d\left(\frac{dv}{dt}\right)$	$\lambda\left(\frac{dv}{dt}\right)$
75	5	distinto lavoro	distinto; lavoro
112	29	R, v	R, r
113	2	$\sqrt{\left(\frac{2gPr}{\gamma P}\right)}$	$\sqrt{\left(\frac{2gPr}{\gamma R}\right)}$
126	17	a dividere	a divedere
130	21	prevenire	provenire